现代数学研究丛书

主编 刘应明

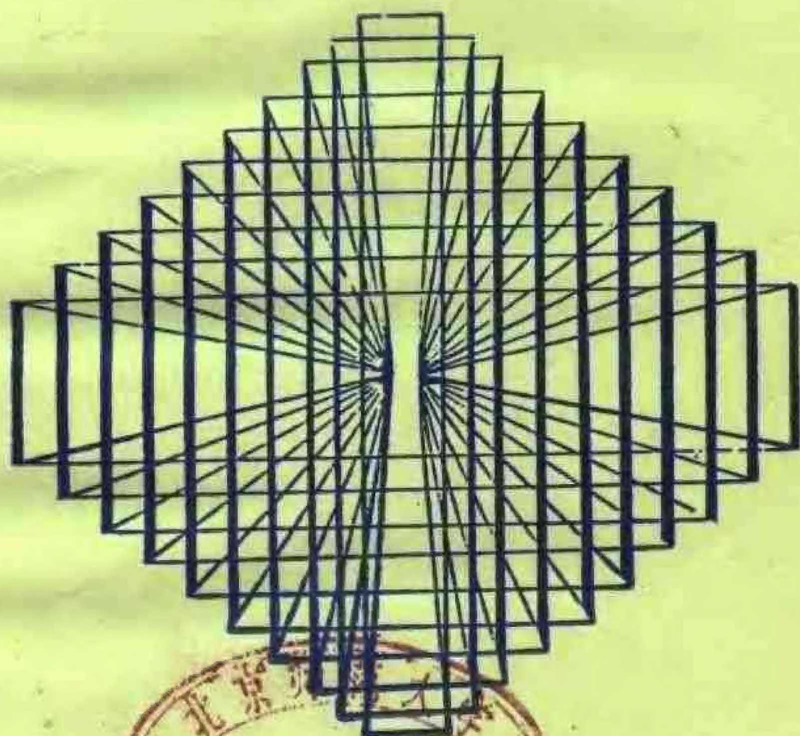
函数迭代与一维动力系统

张景中 熊金城



四川教育出版社

函数迭代与一维动力系统





四川教育出版社

(川)新登字 005 号

责任编辑:何伍鸣
封面设计:何一兵
技术设计:顾求实

现代数学研究丛书
函数迭代与一维动力系统　张景中　熊金城　著

四川教育出版社出版发行　(成都盐道街三号)
四川省新华书店经销　四川新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米　1/32 印张 9.75 插页 4　字数 226 千
1992 年 2 月第一版　1992 年 2 月第一次印刷
印数:1——670 册

ISBN7—5408—1557—4/G・1503　定价:6.24 元

前 言

非线性科学已引起现代科技界许多专家学者的高度兴趣.而非线性数学则是非线性科学的基础或者说是非线性科学的基础中的重要部分.非线性数学中最基本的部分,除了多项式代数理论外,大概要首推迭代的研究了.

一个映射的自迭代,形式上是十分简单的,因而早已引起人们的注意.但由于迭代运算的非线性与全局性特点,给研究工作带来很大困难,直到本世纪,特别是近50年来,才取得突破性进展而引起广泛的兴趣.一方面,人们把迭代作为决定性过程的数学模型,从动力系统的观点看迭代,使迭代与微分方程、差分方程等有着鲜明实际背景的数学分支密切联系起来.另一方面,由于电脑提供的便利,使科学家直观地看到由迭代产生的奇妙景象,为理论研究提供了有效的启发.这使数学家相继获得令人振奋的发现,以至出现目前许多学科的专家竞相关心迭代与动力系统研究的壮观景象.

特别对函数迭代及一维动力系统加以研究,除了因为它可以作为高维动力系统的最基本的例子之外,还因为

1. 有些学科提出的数学模型本来就是一维迭代问题;

2. 单变量差分方程和计算方法中,迭代过程有

着传统的兴趣；

3. 线段上自映射的迭代，有着不同于高维迭代的独特的规律，其本身就是极富吸引力的数学课题.

正因为如此，一维动力系统，特别是线段上自映射的研究近30年来发展迅速，成为动力系统领域中不可忽视的一个分支. 介绍这方面成果的综合论文（如 Z. Nitecki[62]，W. A. Coppel[82]，周作领[129]）反映出这一分支蓬勃发展的现状. 国外，已出版了导引性的专著（如 Collet 等[56]，Preston[112]）. 国内，关于高维动力系统，已有很好的著作（如张筑生[117]）. 但专门介绍函数迭代与一维动力系统概貌的，尚未见到. 作者不揣冒昧，大胆抛砖引玉，希望能适应国内读者了解这一分支基本情形的需要.

撰写过程中，我们尽可能做到既有可读性，又有一定深度. 希望它除了能成为非数学专业读者的参考书之外，也可作为研究生和高年级大学生的教材. 为此，在每章末安排了附录及一些习题，以供读者思考或了解进一步的结果.

书中第一章对迭代作了一般性讨论，其中嵌入流及迭代根部分是关于迭代的古典课题，涉及的最近发展，在附言中作了介绍. 第二章介绍了沙可夫斯基定理及费根堡现象，其中一些处理方法较常见文献作了改进. 第三章对拓扑动力系统，作了较深入的研究. 四、五两章谈到了拓扑共轭、结构稳定与分支，符号方法及混沌等微分动力系统中广泛感兴趣的问题. 对高维微分动力系统，这是一个易于了解的引论.

由于一维动力系统的研究成果极为丰富，文献甚多，书中对有些显然是重要的研究还不可能都加

以介绍，如拓扑熵、遍历理论、逐段单调函数的迭代.另外，在所介绍的几个方面中，也可能遗漏近期某些重要工作.希望有关作者及读者鉴谅，并不吝指正.我们并期待着更好的介绍这一领域研究工作的书出现.

本书的整体安排是两作者共同商定的.其中§11—§18由熊金城执笔，其余部分由张景中执笔.

作者 1990年12月

● 主编 刘应明

● 副主编 杨 路 刘旺金 胡师度

● 张景中 熊金城著

目录

第一章　关于迭代的一般讨论

动力系统是决定性系统的一种数学模型.一个随时间而变化发展的系统,如系统的历史和未来完全由某一指定时刻的状态(所谓初态)所确定,则称之为决定性系统.设系统所有可能的状态的集合(即物理上所说的相空间)为 M. 给出初态 $x_0 \in M$ 之后,系统在时刻 t 的状态 x_t 就被 x_0 和 t 所确定了,因而有

$$x_t = F(t, x_0) \qquad (x_0 \in M, x_t \in M, t \in (-\infty, +\infty))$$

即 x_t 是 x_0 和 t 的"函数".若取定 $t = 1$,记 $f(x) = F(1, x)$,则

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = \underbrace{f(f(\cdots f(x_0)))}_{n\text{次}} = f(x_{n-1})$$

可见,通过对映射 $f(x)$ 的迭代的研究,可以提供系统在未来一串离散时刻状态变化的趋势.当 $f(x)$ 可逆时,通过 f 的逆映射的迭代,可以追溯系统的历史.

从这一观点看,映射的迭代可以看作是某一决定性系统的变化过程的时间离散取样,因而叫离散动力系统.当映射不可逆时,

为了强调只能刻划未来而不能追溯历史，则称为离散半动力系统.

决定性系统可以有别的数学模型，如常微分方程、差分方程、积分方程、发展方程等. 广义地说，描述决定性系统的数学模型都可以叫做动力系统. 但通常所谓动力系统，多指由映射迭代生成的系统或常微系统. 近年来，由于迭代便于在计算机上实现，且由于这一模型的简单性与灵活性，对迭代的研究已成为动力系统领域最活跃的部分.

当状态集 M 是线段或圆周时，对应的动力系统为一维动力系统. 因为一维流形本质上只有线段和圆周. 一维动力系统的离散模型，主要是线段上映射的迭代，即函数的迭代. 圆周上的自映射迭代，可以通过"提升"的技巧化为函数迭代来研究.

本章涉及的，是关于迭代的一般性讨论，以及关于迭代的某些经典性问题.

§1 函数迭代的初等表达式

有一个流传很广的趣味数学问题：

在一条海船上，有 5 名水手，养了 1 只猴子. 他们有一堆椰子放在甲板上. 夜里，一名水手到甲板上，把椰子均分成 5 份，剩下 1 个给了猴子，自己取走 1 份，便回去睡了. 过一会，又一名水手来了，他把甲板上的椰子又均分成 5 份，恰巧又是剩 1 个给了猴子，自己取走 1 份. 这一夜，5 名水手都这样来把椰子分一回，每回都是均分成 5 份剩一个，自己取 1 份，把剩的 1 个给猴子. 天亮了，5 人一同到甲板上，把剩下的椰子均分后，又剩 1 个给了猴子. 问这堆椰子最初至少有多少个？

这个题目有几种不同的解法.智者见智，仁者见仁，不同的解法会把我们引向不同的数学分支.下面介绍的一种简单解法，其思路导向于函数迭代的计算.

设椰子最初有 x 个.问题的麻烦之处在于每次剩 1 个.假想多给水手们 4 个椰子，于是第一个水手来时，便可以恰巧均分成 5 份，他取走一份，剩下的 4 份比不借给水手 4 个椰子时的 4 份仍然多 4 个.于是第二个水手来时又可以恰好分成 5 份了.这样，每个水手来时，都能把椰子均分成 5 份.天亮时，剩下的椰子，仍可均分成 5 份.

这样的一个过程说明，$(x+4)$ 用 $\frac{4}{5}$ 乘 5 次，剩下的仍然是 5 的正整数倍.即

$$\left(\frac{4}{5}\right)^5(x+4)=5k \qquad (k\text{ 是正整数}) \qquad (1.1)$$

这说明 $(x+4)$ 是 5^6 的正整数倍，x 至少是 $5^6-4=15621$.

这种"多给水手 4 个椰子"的巧妙解法，其数学实质是什么呢？

开始是 x 个椰子，来了一个水手之后，设椰子数变为 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 x 的函数.易写出

$$f(x)=\frac{4}{5}(x-1) \qquad (1.2)$$

来了两个水手之后，椰子数成为 $f(f(x))$.记 $f^2(x)=f(f(x))$，$f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$，则到天亮时，来过五个水手了，椰子数是 $f^5(x)$.按所给条件有

$$f^5(x)=5k+1 \qquad (1.3)$$

只要写出 $f^5(x)$ 的表达式便好办了.

耐心地把 $f^5(x)$ 算出来，可知

$$f^5(x)=\left(\frac{4}{5}\right)^5x+\left(\frac{4}{5}\right)^5\times 4-4=\left(\frac{4}{5}\right)^5(x+4)-4 \qquad (1.4)$$

由此可得出：$x+4$ 是 5^6 的整数倍，结论和刚才一样.

但是，把 $f^5(x)$ 算出来是有点麻烦的. 为什么多给水手们 4 个椰子，就避开了这麻烦的运算呢？

本来，从 x 到 $f(x)$，其运算过程是把 x 减 1，乘 $\frac{4}{5}$. 如果多给水手 4 个椰子，运算过程就成为：x 加 4，乘 $\frac{4}{5}$，再减 4. 即 $f(x)$ 有两种表达式

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{4}{5}(x-1) \\
f(x) &= \frac{4}{5}(x+4)-4
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

后一种表达式看起来较繁，但却有利于 $f(x)$ 的迭代计算. 为了说明更一般的规律，我们记 $h(x)=x+4$. 用 $h^{-1}(x)$ 表示 $h(x)$ 的反函数，则 $h^{-1}(x)=x-4$. 这时，$f(x)$ 的后一种表达式可写成

$$f = h^{-1}\circ g\circ h \tag{1.6}$$

这里"$\circ$"表示两个函数之间的复合运算，即：

$$(F\circ G)(x) = F[G(x)]$$

而 $g(x)=\frac{4}{5}x$.

把 f 写成 $h^{-1}\circ g\circ h$ 之后，则

$$f\circ f = h^{-1}\circ g\circ h\circ h^{-1}\circ g\circ h = h^{-1}\circ g\circ g\circ h$$

一般地，对 f 的 n 次迭代有

$$f^n = h^{-1}\circ g^n\circ h \tag{1.7}$$

这就把较为麻烦的 f^n 的计算化成了简单的 g^n 的计算. 从而马上可以写出

$$f^n(x) = h^{-1}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n h(x)\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^n (x+4)-4 \tag{1.8}$$

这个问题以及上面介绍的解法，涉及了函数的迭代，并启发我们寻求一种简化迭代计算的途径.

一般而言，设 $f(x)$ 是定义于集合 M 上，且在 M 中取值的映射——若 M 是数集合，$f(x)$ 就是一个函数. 这时，对于 M 中的任一个 x，$f(f(x))$，$f(f(f(x)))$ 都是有意义的. 记

$$\left.\begin{aligned} &f^0(x) = x \\ &f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \quad (x \in M, n = 0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

则 $f^n(x)$ 对一切非负整数 n 是有意义的. $f^n(x)$ 叫做 $f(x)$ 的 n 次迭代函数，或简单地叫做 f 的 n 次迭代. 对迭代的研究和计算，是数学中的一个很重要的课题.

研究迭代有什么重要意义呢?

在对自然界的观察和在科学技术的实验研究中，人们常常遇到这样的系统：系统在初始时刻 t_0 的状态可以决定以后时刻 t 的状态，或者在理想化了的情形下可以决定以后时刻 t 的状态. 这样，时刻 t 的状态 X_t 便可看成时刻 t_0 的状态 X_{t_0} 和差 $t - t_0$ 的函数：

$$X_t = F(t - t_0, X_{t_0}) \tag{1.10}$$

要是我们每隔一个单位时间对系统作一次观测，则第 $n+1$ 次观测到的状态 $X_{t_{n+1}} = F(t_{n+1} - t_n, X_{t_n})$. 由于 $t_{n-1} - t_n = 1$，故 $X_{t_{n+1}} = F(X_{t_n})$，这里 $F(X) = F(1, X)$. 于是

$$X_{t_{n+1}} = F^{n+1}(X_{t_0}) \tag{1.11}$$

这告诉我们，通过对 F 的迭代的研究，可以从 t_0 时刻系统的状态，预测系统在今后 t_n 时刻的状态及其发展趋势.

举一个简单的例子：自由落体在某一时刻 t_0 的状态可以用两个量 v_{t_0} 和 h_{t_0} 来描述. 这里 v_{t_0} 是 t_0 时刻的瞬时速度，而 h_{t_0} 是此时它离地面的高度. $X_{t_0} = (v_{t_0}, h_{t_0})$ 就是这个系统的 t_0 时刻的状态.

显然,一秒钟以后的状态 X_{t+1} 是 X_t 的函数.如果不考虑空气阻力,并把重力加速度看成常数,读者不难写出这个函数的表达式.

在上面的例子中,时间 t 可以连续变化.也有这样的情形,时间 t 只能取某些离散值.(本节开始举的趣味数学问题中,时间 t 就不能连续取值).在生态学中,有一些简单的虫口模型.例如,没有世代交叠的某种昆虫,若第 n 代虫口数为 x_n,则下一代数目是

$$x_{n+1} = x_n(a-bx_n) \qquad \left(0 \leqslant x_n \leqslant \frac{a}{b}\right) \tag{1.12}$$

为了研究虫口消长的变化动态,就要考虑函数

$$F(x) = x(a-bx) \tag{1.13}$$

的 n 次迭代.这种函数的迭代,人们已用各种方法研究了数十年之久,发现了一系列极为有趣的带普遍性的现象.本书后面将择其重要者加以介绍.

研究迭代重要意义的另一方面,在于电子计算机技术的飞速发展.迭代运算,最便于在计算机上实现.各种各样的计算问题,在计算机上可运用迭代程序求解.计算机的广泛应用,一方面向数学工作者提出了从理论上更深入地研究各式各样的迭代过程的课题.另一方面,也为研究迭代提供了有力的实验工具.近20年来对迭代的研究的蓬勃发展,得力于计算机的帮助甚多.一些重要的定理,首先是在计算机的实验中发现,而后才引起重视,得到证明.

有些十分简单的函数,其 n 次迭代可以写出明显的表达式.这类函数的迭代[illegible]算起来也是容易的.例如,

$$\left.\begin{array}{lll}
1^\circ & f(x) = x + a, & f^n(x) = x + na; \\
2^\circ & f(x) = cx, & f^n(x) = c^n x; \\
3^\circ & f(x) = [illegible] & f^n(x) = x^{2^n}; \\
4^\circ & f(x) = \dfrac{x}{1+bx}, & f^n(x) = \dfrac{x}{1+nbx}
\end{array}\right\} \tag{1.14}$$

这是最容易想到的几种. 在 $f^n(x)=x+na$ 的表达式中,左右两端 n 的意义是不同的. 在左端,$f^n(x)$ 中的 n,是作为运算指令而出现的. 它指示我们,要把某一个确定的运算 f 重复进行 n 次,n 是运算次数,它本身不参与运算. 但在右端 $x+na$ 中的 n,不是运算指令而是实际参与运算的参数值. 把运算指令 n 变成参加运算的普通参数 n,不但大大简化了迭代计算,而且可以让我们一眼看出当 n 变化时 $f^n(x)$ 的变化趋势.

可惜,像上列可以把 n 次迭代写成明显表达式的函数实在太少了. 但可以设法扩大它们的范围. 办法是前面那个趣味数学问题的解法中指示给了我们的:设 $h(x)$ 是一个可逆函数,$h^{-1}(x)$ 是它的反函数,如果

$$g(x)=h^{-1}\circ f\circ h(x)$$

则

$$g^n(x)=h^{-1}\circ f^n\circ h(x) \tag{1.15}$$

只要能把 f^n 的明显表达式写出来,那末,自然也就能够写出 g^n 的明显表达式了.

下面看几个例子.

例 1.1　$g(x)=ax+b$,　求　$g^n(x)$ 之表达式$(a\neq 1)$

取　$h(x)=x+\dfrac{b}{a-1}$,　$h^{-1}(x)=x-\dfrac{b}{a-1}$,　则

$$g(x)=h^{-1}(ah(x))=a\left(x+\frac{b}{a-1}\right)-\frac{b}{a-1}.$$

故得

$$g^n(x)=h^{-1}[a^nh(x)]=a^n\left(x+\frac{b}{a-1}\right)-\frac{b}{a-1}$$

$$=a^nx+b\times\frac{a^n-1}{a-1} \tag{1.16}$$

例 1.2　$g(x)=\dfrac{x}{(1+bx^r)^{\frac{1}{r}}}$,　求 $g^n(x)$ 之表达式.

取 $h(x)=x^k$, $h^{-1}(x)=x^{\frac{1}{k}}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+bx}$, 则

$$g(x)=h^{-1}\circ f\circ h(x)=\left[\frac{x^k}{1+bx^k}\right]^{\frac{1}{k}} \tag{1.17}$$

故得

$$g^n(x)=h^{-1}\circ f^n\circ h(x)=\frac{x}{(1+nbx^k)^{\frac{1}{k}}} \tag{1.18}$$

例 1.3 $g(x)=2x^2-1$, 求 $g^n(x)$ 之表达式.

取 $h(x)=\arccos x$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, $h^{-1}(x)=\cos x$, 则

$$g(x)=h^{-1}(2h(x))=\cos(2\arccos x),$$

$$g^n(x)=\cos(2^n\arccos x)\qquad (1\leqslant x\leqslant 1) \tag{1.19}$$

这里的 $g^n(x)$通常叫做切比雪夫多项式.

例1.4 $g(x)=4x(1-x)$, 求 $g^n(x)$ 之表达式.

取 $h(x)=\arcsin\sqrt{x}$, $(0\leqslant x\leqslant 1)$ $h^{-1}(x)=\sin^2x$,

则

$$g(x)=h^{-1}(2h(x))=(\sin 2\arcsin\sqrt{x})^2,$$

$$g^n(x)=h^{-1}(2^nh(x))=(\sin 2^n\arcsin\sqrt{x})^2 \tag{1.20}$$

例 1.5 $g(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}$, 求 $g^n(x)$ 之表达式.

取 $h(x)=\mathrm{arc\,tg}x$, $h^{-1}(x)=\mathrm{tg}\,x$, 则

$$g(x)=\mathrm{tg}\,2\mathrm{arc\,tg}\,x.$$

$$g^n(x)=\mathrm{tg}\,2^n\mathrm{arc\,tg}\,x \tag{1.21}$$

例 1.6 $g(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ $(ac-b\neq 0)$, 求 $g^n(x)$ 之表达式

令 s 是二次方程

$$s^2-(a-c)s-b=0 \tag{1.22}$$

的一个根,取

$$h(x)=\frac{1}{x-s},\quad h^{-1}(x)=\frac{1}{x}+s \tag{1.23}$$

则

$$g(h^{-1}(x))=\frac{\dfrac{a}{x}+as+b}{\dfrac{1}{x}+s+c}=\frac{a+asx+bx}{1+sx+cx}$$

$$=\frac{as+b}{s+c}+\frac{a-\dfrac{as+b}{s-c}}{(s+c)x+1}=s+\frac{a-s}{(s+c)x+1}\quad(1.24)$$

这是因为由 $s^2-(a-c)s-b=0$，可知$\dfrac{as+b}{s+c}=s$之故. 于是

$$h\circ g\circ h^{-1}(x)=\frac{1}{g(h^{-1}(x))-s}=\frac{s+c}{a-s}x+\frac{1}{a-s}\qquad(1.25)$$

令 $f(x)=\dfrac{s+c}{a-s}x+\dfrac{1}{a-s}$，　则得

$$g(x)=h^{-1}\circ f\circ h(x),$$

$$g^n(x)=h^{-1}\circ f^n\circ h(x)=\left(f^n\left(\frac{1}{x-s}\right)\right)^{-1}+s\qquad(1.26)$$

由(1.16)，可得

$$f^n(x)=\left(\frac{s+c}{a-s}\right)^n(x-x_0)+x_0,\quad\left(x_0=\frac{1}{a-c-2s}\right)\qquad(1.27)$$

于是最终可以得到

$$g^n(x)=s+\frac{(a-s)^n(x-s)}{(a-s)^nx_0(1-c-s)(x-s)+(s+c)^n}\qquad(1.28)$$

在此例中，当 a,b,c 为实数时，若 s 不是实根，想把 $g^n(x)$ 的上列表达式化成实系数的形式还是相当麻烦的. 下面提供另一个方法.

我们把方程

$$g(x)-x=0\qquad(1.29)$$

的根叫做 $g(x)$ 的不动点. 显然，若 $x=s$ 是 $g(x)$ 的不动点. 则它也

是 $g^n(x)$ 的不动点，当 $g(x)$ 是例 1.6 中的线性分式时，$g(x)$ 的不动点有两个，就是方程

$$\frac{ax+b}{x+c}=x \quad (\text{等价于 } x^2-(a-c)x-b=0) \tag{1.30}$$

的两个根 s_1, s_2.

通常，$g^n(x)$ 也是可以写成形式

$$g^n(x)=\frac{a_n x+b_n}{x+c_n} \quad (a_n c_n - b_n \neq 0) \tag{1.31}$$

的线性分式，这时，$g^n(x)$ 也只有两个不动点 s_1, s_2. 即 s_1, s_2 也是方程

$$x^2-(a_n-c_n)x-b_n=0 \tag{1.32}$$

的根，故知 $b_n=b$，$a_n-c_n=a-c$ 于是

$$g^n(x)=\frac{(a+t_n)x+b}{x+(c+t_n)} \tag{1.33}$$

只要设法定出 t_n 就可以了.

求 $g^n(x)$ 在不动点 $x=s_i \quad (i=1,2)$ 处的导数，可知

$$(g^n(x))'\big|_{x=s_i} = (g'(s_i))^n \tag{1.34}$$

用 s 表示 s_i 中任一个. 可求出(利用 s 满足的方程化简)

$$f'(s)=\frac{(a-s)^2}{ac-b} \quad (\text{即例 1.6 中用到的}\frac{a-s}{s+c}) \tag{1.35}$$

另一方面

$$(g^n(x)')\big|_{x=s}=\frac{a+t_n-s}{s+c+t_n}, \tag{1.36}$$

于是得到 t_n 应满足的方程

$$\frac{a+t_n-s}{s+c+t_n}=\frac{(a-s)^{2n}}{(ac-b)^n} \tag{1.37}$$

由此解出

$$t_n=\frac{(a-s)\left[\left(\frac{(a-s)^2}{ac-b}\right)^{n-1}-1\right]}{1-\left(\frac{(a-s)^2}{ac-b}\right)^n} \tag{1.38}$$

只要再把 t_n 化为实的形式即可.

易知 $y=(a-s)$ 满足方程

$$y^2-(a+c)y-ac-b=0 \tag{1.39}$$

故若 s 不是实数而 a,b,c 为实数时，必有 $\left|\frac{(a-s)^2}{ac-b}\right|=1$. 故可设

$$a-s=\sqrt{|ac-b|}e^{i\theta} \tag{1.40}$$

由 s 不是实数，可知必有 $ac-b>0$，故

$$\frac{(a-s)^2}{ac-b}=e^{2i\theta} \tag{1.41}$$

利用 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可求出

$$t_n=\sqrt{ac-b}\times\frac{\cos(2n-1)\theta-\cos\theta}{1-\cos 2n\theta} \tag{1.42}$$

如果　$\cos 2n\theta=1$，　t_n 的这个表示式(1.42)便失去了意义. 这时 $(g^n(x))'\big|_{x=s}=1$，　因而由(1.36)得

$$\frac{a+t_n-s}{s+c+t_n}=1$$

由此推得 $a-s=s+c$，

即　$a-c=2s$. 这说明 s 是实数；与原来所设 s 不是实数矛盾，这个矛盾说明：$f^n(x)$ 不能表成(1.31)的形式，从而

$$f^n(x)=a_nx+b_n$$

由于 s_1 和 s_2 都满足方程

$$f^n(x)=x$$

即

$$\begin{cases}a_ns_1+b_n=s_1\\ a_ns_2+b_n=s_2\end{cases}\qquad(s_1\neq s_2)$$

由此可断定 $a_n=1$　而 $b_n=0$.

总之，当 $\cos 2n\theta=1$　时，　$f^n(x)=x$. 这就完全解决了我们的

问题.

附带指出，线性分式迭代的计算，也可以化为二阶矩阵的乘幂计算问题. 这里不再赘述.

§2 迭代指数的推广与迭代根

我们已经知道，只要函数 $f(x)$ 的值域不超出它的定义域，便可以定义它的 n 次迭代 $f^n(x) = f \circ f^{n-1}(x)$. 这里 n 可以取任意正整数，而 $f^0(x) = x$. 我们把 n 叫做 $f^n(x)$ 关于 $f(x)$ 的迭代指数.

迭代指数有类似于数的乘幂指数的运算性质. 如：

迭代指数性质	乘幂指数性质	
$f^n \circ f^m = f^{n+m}$	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	
$(f^n)^m = f^{nm}$	$(a^n)^m = a^{nm}$	(2.1)
$f^0(x) = x$	$a^0 = 1$	

这使我们想到：既然乘幂指数可以从自然数推广到全体整数、有理数和全体实数，那末，迭代指数能不能类似的推广呢？

根据(2.1)中的

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}$$

如果 $m = -n$，而且保持这个规律，应当有

$$f^n \circ f^{-n} = f^{-n} \circ f^n = f^0 \tag{2.2}$$

由于 $f^0(x) = x$，(2.2)说明，把 f^n 的反函数定义为 f^{-n} 是合理的. 今后，当 f^n 有唯一确定的反函数时，我们就记之以 f^{-n}

这样定义之后，如果 $f(x)$ 的定义域和值域相同，而且有唯一确定的反函数 $f^{-1}(x)$，则(2.1)对一切整数 m、n 成立.

怎样定义分数迭代指数呢？容易想到，从(2.1)中的

$$(f^n)^m = f^{nm}$$

出发,假想 n 可以取分数值 $\frac{1}{m}$,应当有

$$\left(f^{\frac{1}{m}}\right)^m = f \tag{2.3}$$

也就是说,$f^{\frac{1}{m}}$ 应当是这样的函数,它迭代 m 次之后等于 f. 进一步会想到:$f^{\frac{1}{m}}$ 迭代 k 次就应当是 $f^{\frac{k}{m}}$,而 $f^{\frac{k}{m}}$ 的反函数就应当是 $f^{-\frac{k}{m}}$. 这样,不是把迭代指数推广到了全体有理数了吗?

但事情并不像我们想的这么顺利. 首先,对于给定的函数 f,是不是存在一个函数,它的 m 次迭代恰巧是 f 呢?一般说来,如果有函数 $g(x)$,它的定义域和 $f(x)$ 相同,值域不超出定义域,满足

$$g^m(x) = f(x) \quad (\text{对一切 } f \text{ 定义域中的 } x) \tag{2.4}$$

我们就说 g 是 f 的 m 次迭代根,这里 m 是正整数. 问题是对什么样的 f 和哪些 m,迭代根才存在呢?

再说,即使 f 有一个 m 次迭代根 g,也不一定就把 g 叫做 $f^{\frac{1}{m}}$. 因为 f 还可能有别的 m 次迭代根 g_1. 当 f 的 m 次迭代根不止一个时,我们用什么标准来确定其中某一个是 $f^{\frac{1}{m}}$ 呢?这就是迭代根在什么条件下具有唯一性的问题.

就像负数没有实的平方根一样,很多连续函数没有连续的二次迭代根. 容易想到下面的定理:

定理 2.1 设 $f(x)$ 是定义于线段 I 且取值于线段 I 的连续函数,$f(x)$ 有唯一的不动点 $f(x_0) = x_0$. 如果存在 $\delta > 0$ 使 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$,且有

$$\begin{cases} f(x) > x_0 & (x \in (x_0 - \delta, x_0)) \\ f(x) \leqslant x_0 & (x \in (x_0, x_0 + \delta)) \end{cases} \tag{2.5}$$

则对任意的正偶数 $2m$,f 没有连续的 $2m$ 次迭代根.

证明　只要证明 f 没有连续的二次迭代根就够了. 因为, 如果 g 是连续的 $2m$ 次迭代根, g^m 一定是连续的二次迭代根.

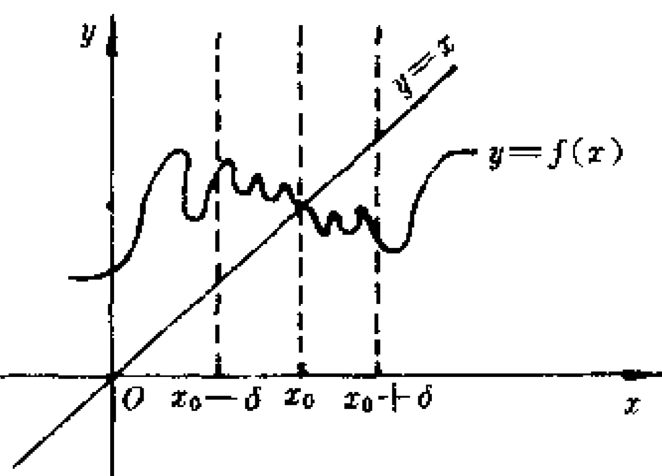


图 2・1

用反证法, 假设有 I 上的连续函数 $g(x)$ 满足 $g^2(x) = f(x)$, 我们来导出矛盾.

首先, x_0 一定是 $g(x)$ 的不动点. 否则, 若 $g(x_0) = x_1 \neq x_0$, 则 $f(x_1) = g(g(x_1)) = g(g(g(x_0))) = g(f(x_0)) = g(x_0) = x_1$, 这说明 x_1 也是 f 的不动点. 这与所设的 f 只有一个不动点 x_0 矛盾.

取足够小的 $\delta_1 > 0$, 使当 $|x - x_0| \leqslant \delta_1$ 时, 有 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 且

$$|g(x) - x_0| < \delta \tag{2.5}$$

设 $g(x)$ 在 $[x_0 - \delta_1, x_0]$ 上的最大值是 l, 分两种情形讨论:

(i) 若 $l \leqslant x_0$, 必可找到足够小的 $\delta_2 > 0$, 使 $g^2(x)$ 在小区间 $[x_0 - \delta_2, x_0]$ 上的值不超过 x_0, 此与 (2.5) 中前一式矛盾.

(ii) 若 $l > x_0$, 则 $g(x)$ 在 $(x_0, l]$ 上取值必须大于 x_0, 否则不能保证 $g(g(x))$ 在 $[x_0 - \delta_1, x_0)$ 上取值大于 x_0. 但由 $g(x)$ 在 $(x_0, l]$ 上大于 x_0 可推出有足够小的 $\delta_3 > 0$, 使 $g^2(x)$ 在区间 $(x_0, x_0 + \delta_3]$ 上大于 x_0, 这又与 (2.5) 的后一式矛盾. 证毕.

由定理 2.1 可得一个显然的推论: 若 $f(x)$ 是严格递减的函数, 则 f 决不会有连续的 $2m$ 次迭代根.

由于严格单调函数的连续迭代根一定也是严格单调的, 而严格单调函数的偶数次迭代一定是严格递增的, 故严格递减函数当然不会有连续的偶次迭代根.

虽然负数没有实的偶次方根，但所有实数都有奇次方根. 那末，是不是所有连续函数都有连续的奇数次迭代根呢?下面的定理告诉我们，并非如此.

定理 2.2　若 $f(x)$ 定义于 $[a,b]$ 上，在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 b 和 a. f 在 $[a,b]$ 的某内点 c 取到极值且在 $[a,c]$ 上和 $[c,b]$ 上严格单调. 则对任意的整数 $m\geqslant 2$，f 没有连续的 m 次迭代根.

证明　用反证法. 假设有 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$，取值在 $[a,b]$ 上，且满足 $g^m(x)=f(x)$，我们来导出矛盾.

由于 f 在 $[a,c]$ 上严格单调，$g(x)$ 也一定在 $[a,c]$ 上严格单调. 否则，由 $g(x)$ 连续可知有 $[a,c]$ 上的不同的两点 x_1,x_2 使 $g(x_1)=g(x_2)$，从而 $g^m(x_1)=g^m(x_2)$，即 $f(x_1)=f(x_2)$，这与 f 在 $[a,c]$ 上的严格单调性矛盾. 同理，g 也一定在 $[c,b]$ 上严格单调. 由于 f 不在整个 $[a,b]$ 严格单调. 故 g 也不在 $[a,b]$ 上严格单调，从而 $g(x)$ 也在 $x=c$ 取到极值.

由于 $g^m(x)=f(x)$ 的最大与最小值分别为 b,a. 故 $g(x)$ 的最大与最小值也是 b 和 a. 显然，在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 这两个区间中至少有一个区间 A，使得 $g(x)$ 在 A 上的最大与最小值为 b 和 a. 由连续函数的介值定理，$g(x)$ 在 A 上取到 $[a,b]$ 上的一切值. 由于 c 是 $g(x)$ 的极值点. 故在 c 的邻域可找到两点 $y_1\in(a,b)$ 和 $y_2\in(a,b)$，$y_1\neq y_2$ 但 $g(y_1)=g(y_2)$. 在 A 内又找到两点 x_1,x_2 使 $g(x_1)=y_1$，$g(x_2)=y_2$. 于是有

$$
\begin{aligned}
f(x_1)&=g^{m-1}(g(x_1))=g^{m-1}(y_1)=g^{m-1}(y_2)\\
&=g^{m-1}(g(x_2))=f(x_2)
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

这与 $f(x)$ 在 A 上的严格单调性矛盾. 证毕.

定理 2.1 和定理 2.2 从反面提示我们，要考虑迭代根的存在

问题，也许最好从严格递增函数着手，这样有可能获得正面的结论. 的确，下述用拚凑插入的方法构造严格递增函数的二次迭代根的过程，早在60年前就为人所知了.

定理2.3　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续而且严格递增函数，$f(a)=a$，$f(b)=b$，对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)>x$. 则存在定义于 $[a,b]$ 且取值于 $[a,b]$ 的连续函数 $g(x)$，满足

$$g(g(x))=f(x)\qquad(x\in[a,b])\tag{2.8}$$

和预给的初值

$$g(x)=g^*(x)\qquad(x\in[x_0,x_1])\tag{2.9}$$

这里 x_0 是 (a,b) 内任一点，x_1 是 $(x_0,f(x_0))$ 内任一点，$g^*(x)$ 是 $[x_0,x_1]$ 上满足条件 $x_0<g(x_0)=x_1<g(x_1)=f(x_0)$ 的任意的严格递增连续函数.

证明　$f(x)$ 和 $g(x)$ 之间的关系如图 2.2.

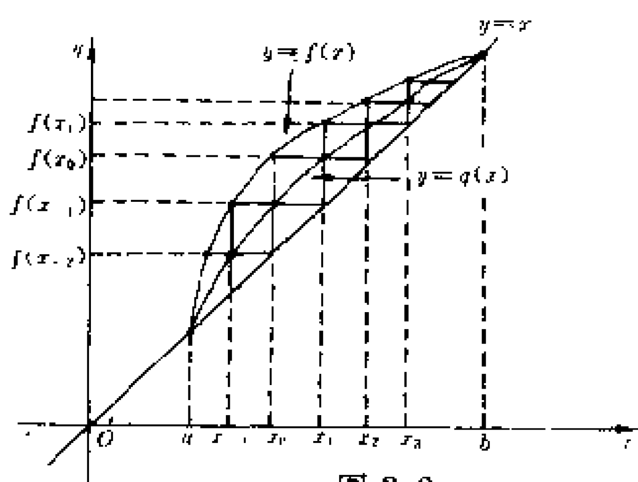


图 2.2

令 $f(x_0)=x_2$，$f(x_1)=x_3$. 一般地，对自然数 n，令

$$f(x_n)=x_{n+2}\tag{2.10}$$

则由 f 的严格递增性和 $f(x)>x$，从 $x_0<x_1<f(x_0)=x_2$ 可知对一切整数 $n\geqslant0$，有

$$x_n<x_{n+1}\tag{2.11}$$

但显然有 $x_n\leqslant b$，故 $\{x_n\}$ 是递增有界列，从而有极限 x^*. 由(2.10)两端令 $n\to+\infty$ 取极限可知 x^* 是 f 的不动点，从而 $x^*=b$，即

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=b\tag{2.12}$$

再令 $f^{-1}(x_1)=x_{-1}, f^{-1}(x_0)=x_{-2}$，一般地对自然数 n，令

$$f^{-1}(x_{-n})=x_{-(n+2)} \tag{2.13}$$

则有

$$x_{-n}>x_{-(n+1)} \tag{2.14}$$

同理可知递减有界列 $\{x_{-n}\}$ 以 a 为极限：

$$\lim_{n\to+\infty} x_{-n}=a \tag{2.15}$$

由 (2.12) 和 (2.15)，我们只要在一切 $[x_n,x_{n+1})$ 上给出 $g(x)$ 的定义，并取 $g(a)=a, g(b)=b$　即可. 令 $n=0,1,2\cdots$，　归纳地定义

$$\begin{cases} g_0(x)=g^*(x) & x\in[x_0,x_1) \\ g_{n+1}(x)=f(g_n^{-1}(x)) & x\in[x_{n+1},x_{n+2}) \\ g_{-(n+1)}(x)=g_{-n}^{-1}(f(x)) & x\in[x_{-n-1},x_{-n}) \end{cases} \tag{2.16}$$

由数学归纳法以及 x_n 的定义可知，对一切整数 n，我们在 $[x_n,x_{n+1})$ 上定义了严格递增的连续函数 $g_n(x)$，满足

$$\begin{cases} g_n(x_n)=x_{n+1} \\ \lim\limits_{x\to x_{n+1}} g_n(x)=x_{n+2}=g_{n+1}(x_{n+1}) \\ g_{n+1}(g_n(x))=f(x) & (x\in[x_n,x_{n+1}]) \end{cases} \tag{2.17}$$

最后取

$$g(x)=\begin{cases} a & (x=a) \\ b & (x=b) \\ g_n(x) & (x\in[x_n,x_{n+1})), n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots \end{cases} \tag{2.18}$$

易知 $g(x)$ 是连续的严格递增函数，满足(2.8) 和(2.9)，即它是我们要的 $f(x)$ 的二次迭代根. 证毕.

能不能把定理 2.3 略加变通，拼凑出 $f(x)$ 的 m 次迭代根呢?这并不难，我们可以用类似手法建立

定理 2.4　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上严格递增的连续函数，$f(a)=a$，

$f(b)=b$，对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)>x$，则对任意给定的正整数 $m\geqslant 2$，存在定义于 $[a,b]$ 且取值于 $[a,b]$ 的连续函数 $g(x)$，满足

$$g^m(x)=f(x)\qquad(x\in[a,b])\tag{2.19}$$

和预给的初值

$$g(x)=g^*(x)\qquad(x\in[x_0,y_0])\tag{2.20}$$

这里 x_0 是 (a,b) 内任一点，y_0 是 $(x_0,f(x_0))$ 内任一点，而 $g^*(x)$ 是 $[x_0,y_0]$ 上满足条件

$$\begin{aligned}x_0<g(x_0)<g^2(x_0)<\cdots<g^{m-1}(x_0)=y_0<g(y_0)&\\=f(x_0)&\end{aligned}\tag{2.21}$$

的任意的严格递增连续函数.

证明　我们叙述得简单一些，细节请读者完成.

先作序列 $\{x_n\}$　$(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\cdots)$，定义如下

$$\begin{cases}x_n=g^n(x_0) & (n=1,2,\cdots m)\\ x_n=f(x_{n-m}) & (n>m)\\ x_n=f^{-1}(x_{n+m}) & (n<0)\end{cases}\tag{2.22}$$

易知 $x_n<x_{n+1}$，当 $n\to+\infty$ 时，$x_n\to b$，当 $n\to-\infty$ 时，$x_n\to a$. 故只要在诸区间 $[x_n,x_{n+1})$ 上给出 $g(x)$ 之定义，并令 $g(a)=a$，$g(b)=b$ 即可.

已知 $g(x)$ 在 $[x_n,x_{n+1}]$ $(n=0,1,2,\cdots,m-1)$ 上已被给定为 $g^*(x)$. 我们归纳地定义 $[x_n,x_{n+1})$ 上的函数 $g_n(x)$ 如下：

$$\begin{cases}g_n(x)=g^*(x) & (x\in[x_n,x_{n+1}),0\leqslant n<m-1)\\ g_n(x)=f\circ g^{-1}_{n-m+1}\circ g^{-1}_{n-m+2}\circ\cdots\circ g^{-1}_{n-1}(x), & \\ \qquad (x\in[x_n,x_{n+1}),n\geqslant m-1) & \\ g_{-n}(x)=g^{-1}_{-n+1}\circ g^{-1}_{-n+2}\circ\cdots\circ g^{-1}_{-n+(m-1)}\circ f(x) & \\ \qquad (x\in[x_{-n},x_{-n+1}),n\geqslant 1) & \end{cases}\tag{2.23}$$

不难验证定义的合理性. 易知 $g_n(x)$ 在 $[x_n,x_{n+1})$ 上连续，严格递增，

且满足

$$\begin{cases} g_n(x_n) = x_{n+1} \\ \lim\limits_{x\to x_{n+1}} g_n(x) = x_{n+2} = g_{n+1}(x_{n+1}) \\ g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_{n-m+1}(x) = f(x) \\ \qquad\qquad (x \in [x_{n-m+1}, x_{n-m})) \end{cases} \tag{2.24}$$

最后取

$$g(x) = \begin{cases} a & (x = a) \\ b & (x = b) \\ g_n(x) & (x \in [x_n, x_{n+1})) \\ & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases} \tag{2.25}$$

则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的 m 次连续的迭代根，且满足给定的初始条件(2.20)．证毕．

在定理 2.3 和 2.4 中，对 $f(x)$ 作了一些限制：

(i) 要求 $f(a) = a, f(b) = b$，

(ii) 要求 $f(x) > x(a < x < b)$，

(iii) 要求 $f(x)$ 连续，严格递增．其实，这些条件当中，只有(iii)才是必不可少的．下面指出，(i)，(ii) 这两个条件并不使定理的结论失去一般性．

首先，条件(i) 说明 f 的定义区间是闭的，这一点无关紧要．如果 f 的定义域是开区间或半开半闭的区间，由于 f 的单调性和连续性，我们可以定义

$$\begin{cases} f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \\ f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \end{cases} \tag{2.26}$$

这就把 f 的定义域扩充为闭区间$[a,b]$．若 $g(x)$ 是 f 在$[a,b]$上的 m 次迭代根，则对 g 的定义域进行限制之后，易知 g 在(a,b)(或$[a,b)$，

$(a,b]$) 上也是 f 的迭代根.

条件(i)要求 $f(a)=a, f(b)=b$.这也不失一般性.如果 f 在端点不都是不动点,例如 $f(a)>a$ 或 $f(b)<b$(由于 f 的值域不应超出定义域,$f(a)<a$ 或 $f(b)>b$ 是不可能的),我们可以把 f 开拓为以 $[a,b]$ 为子区间的 $[a^*,b^*]$ 上的 f^*,使 f^* 满足(i),且连续,严格递增.(这种开拓的可能性很多,故 f^* 和 $[a^*,b^*]$ 是很不确定的,但并不影响我们的结论)如果在 $[a^*,b^*]$ 上有连续函数 g^*,满足

$$g^{*m}(x)=f^*(x)$$

则 g^* 在 $[a,b]$ 上的限制 g,是 f 在 $[a,b]$ 上的迭代根.

现在再指出条件(ii)也不影响结论的一般性.如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上满足 $f(x)<x$ 而不是 $f(x)>x$.我们可以考虑

$$F(x)=-f(-x)\qquad (x\in[-b,-a])$$

则在 $(-b,-a)$ 上有 $F(x)>x$.因而对 $F(x)$ 可以应用定理 2.4,于是存在满足一定初始条件的连续函数 $G(x)$ 使

$$G^m(x)=F(x)\qquad (x\in[-b,-a])$$

再令 $g(x)=-G(-x)$,则 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上满足相应初始条件的连续函数,且

$$g^m(x)=f(x)\qquad (x\in[a,b])$$

当然,在 $f(x)<x$ 的情形,初始条件的限制在不等式的方向上与定理 2.4 有所不同.这些细节留给读者自己澄清.

最后来考查更一般的情形:在 (a,b) 上 $f(x)$ 有若干不动点,这时 $f(x)>x$ 和 $f(x)<x$ 这两个不等式在 (a,b) 上都不被满足,我们可以把 $[a,b]$ 分成很多小区间来考虑.由连续性,若 $f(x_0)>0$,则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域为正.反之,若 $f(x_0)<0$,则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域为负.可见,$[a,b]$ 上去掉了 $f(x)$ 的不动点之后剩下的是开集,这个开集由不超过可数个开区间和两个可能是半开的区间组成.设这

些区间是 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n, \cdots$，设 f 在 $\bar{\Delta}_n$ 上的限制是 f_n，则在 $\bar{\Delta}_n$ 内恒有 $f_n(x) > x$ 或 $f_n(x) < x$. 如果 $\bar{\Delta}_n$ 的端点 u 不与 a 或 b 重合，必有 $f_n(u) = u$. 应用定理 2.4 及上述关于条件(i)的讨论，可以在 Δ_n 上构造出 f_n 的 m 次迭代根 g_n，g_n 连续，严格递增，满足一定初始条件，并且当 $\bar{\Delta}_n$ 的端点 u 不和 a 或 b 重合时，必有 $g_n(u) = u$. 把所有这些 g_n 拼凑在一起，必要时取极限补足若干点处的定义（或简单地令 $[a,b]$ 中去掉诸 $\bar{\Delta}_n$ 中的点后，剩下的点都是 g 的不动点），就可以构成 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续迭代根 $g(x)$.

我们把这一讨论的结果明确地叙述为：

定理 2.5　若 $f(x)$ 在线段 I 上连续，严格递增，当 $x \in I$ 时有 $f(x) \in I$. 则对任意的正整数 m，存在定义于 I 上且在 I 中取值的严格递增的连续函数 $g(x)$，满足

$$g^m(x) = f(x)$$

简言之，连续的严格递增函数必有任意次连续迭代根. 如果 $f(x)$ 是恒等映射，即 $f(x) = x$，显然 f 的连续递增迭代根也必为 $f(x)$ 自身.（但 f 的连续递减迭代根却有无穷多个！请读者思考一下为什么？）如果 $f(x)$ 不恒等于 x，由定理 2.4 中关于初始条件的论断可知，f 的 m 次 $(m \geqslant 2)$ 连续递增迭代根有无穷多个. 从一一对应的观点来说，它们和实数一样多. 迭代根的这种不确定性，是我们不希望的，它给我们推广迭代指数带来了困难！

§3　流与嵌入流问题

在前一节里，我们尽管证明了连续的严格递增函数有任意次的连续递增迭代根，但仍然没有实现原来的推广迭代指数的设想.

即使在最简单的情形，$f(x)$ 连续而且严格递增的情形，也没有给出 $f(x)$ 的分数次迭代的合理的定义. 如果我们任意选取 $f(x)$ 的一个 m 次的连续递增迭代根 $g(x)$ 为 $f^{\frac{1}{m}}$，这样虽然使等式

$$(f^{\frac{1}{m}})^m = f$$

得以成立，但却不能保证别的指数运算规律，例如

$$f^{\frac{1}{m}} \circ f^{\frac{1}{n}} = f^{\frac{m+n}{mn}}$$

就不一定成立.

也许读者会想到这样的办法：取 f 的某一个连续递增的二次迭代根为 $f^{\frac{1}{2}}$，再取 $f^{\frac{1}{2}}$ 的某个连续递增的二次迭代根为 $f^{\frac{1}{4}}$，一般地，得到某个连续递增的 $f^{\frac{1}{2^n}}$ 之后，就取它的某连续递增的二次迭代根作为 $f^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. 这样得到了一列函数 $\{f^{\frac{1}{2^n}}, n = 0,1,2,3,\cdots\}$. 再规定 $f^{\frac{1}{2^n}}$ 的 m 次迭代为 $f^{\frac{m}{2^n}}$. 最后，设 α 为任一个正实数，总可以找到数列

$$\alpha_k = \frac{m_k}{2^{n_k}} \qquad (k = 1,2,3,\cdots) \tag{3.1}$$

使

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k = \alpha \tag{3.2}$$

然后再定义

$$f^{\alpha}(x) = \lim_{k\to+\infty} f^{\alpha_k}(x) \tag{3.3}$$

只要 (3.3) 右端的极限存在而且连续严格递增. 这样对所有正实数 α 就定义了 f^{α}，再规定 f^{α} 的反函数为 $f^{-\alpha}$ 就行了.

这条路的确是走得通的. 关键在于每次选取的二次迭代根要适当. 不过，整个过程和证明相当繁琐，这里不详加介绍了. 我们将用一个简捷得多的方法解决这个问题.

我们的注意力，现在不局限于某个特殊的 m 次迭代根的存在与否，而是从整体的观点引入流的概念：

定义 3.1 一个映射 $\varphi(t,x)(-\infty<t<+\infty, x\in I, \varphi(t,x)\in I)$ 叫做 I 上的一个流，如果满足

(i) $\varphi(0,x)=x$ （对一切 $x\in I$）

(ii) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$

（对一切实数 s,t 和一切 $x\in I$）

如果 $\varphi(t,x)$ 仅对 $t\geqslant 0$ 有意义且(ii)仅对非负实数 s,t 成立，则称 $\varphi(t,x)$ 为 I 上的一个半流.

定义中的 I，在本书中如无特别声明均指实轴上的一个线段*. 但在流的定义中，I 可以是高维欧氏空间的区域，或一般拓扑空间，甚至一般集合. 如果 I 是拓扑空间而且 $\varphi(t,x)$ 是连续映射，则称之为连续流或连续半流，或 C^0 流（半流）. 如果 I 有微分结构而 $\varphi(t,x)$ 是 r 次连续可微的，则称为 C^r 流. 对于不熟悉拓扑空间概念或不熟悉有关微分结构的概念的读者，干脆把 I 理解为通常欧氏空间中的区域或光滑曲面就可以了.

回想一下本书 §1 中所讲的迭代的实际意义，便不难理解流的实际意义. 我们把 $\varphi(t,x)$ 的变元 t 看成时间参数，而把 x 看成某一个物理过程，或化学过程，或其他自然过程中所考察的系统的某个状态，而 I 就是状态空间——一切可能状态的集合. 等式

$$y=\varphi(t,x)$$

当 $t>0$ 时，便可理解为：如果系统在某一时刻 t_0 处于状态 x，则在 t 时间之后将处于状态 y，而 y 仅与初态 x 和时间差 t 有关，与 t_0 无关. 当 $t<0$ 时，y 可理解为 t 时间之前的状态. 这样一来，一个流，是从数学上对某个可能的决定性过程的刻画. t 可以取负值，意味着这个过程是可逆推的. 即知道了目前系统的状态，不但可以预测未

* 这线段可以是开区间、闭区间、半开半闭的区间，其端点可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

来的状态,而且可以推断过去的状态.

在现实世界,更多遇到的是这样的决定性过程 —— 从目前状态虽能推断未来,却无法回溯过去. 即在 $\varphi(t,x)$ 中 t 只能取非负值,这就是半流.

在流或半流 $\varphi(t,x)$ 中取 $t=1$,得到 I 上的自映射

$$f(x)=\varphi(1,x) \tag{3.4}$$

f 叫做 φ 的时间为 1 的映射. 由定义 3.1 的(ii),可知

$$f^n(x)=\varphi(n,x) \tag{3.5}$$

这里 n 取所有整数值或仅取非负整数值,视 φ 为流或半流而定. 这样得到的序列 $\{f^n(x)\}$ 叫做 φ 的一个离散采样. (3.5) 式清楚地说明了流与迭代之间的关系 —— 把迭代指数 n 连续化,可以得到流或半流,反过来,流或半流中时间参数抽取等差的离散列,可以得到某个映射的诸次迭代.

但是,即使没有流,我们也可以从任何一个 I 上的自映射 —— 取值在 I 中的映射 —— $f(x)$ 出发,得到一列迭代映射 $\{f^n\}$. $\{f^n\}$ 通常也叫做由 f 生成的离散动力系统(当 n 可取一切整数时)或离散半动力系统(当 n 可取一切正整数时).

通常,一个流(或半流)也叫做一个动力系统(或半动力系统),或者更准确地叫做时间连续的动力系统.

定义 3.2 设 $f(x)$ 是 I 到自身的映射. 如果存在 I 上的流(或半流) $\varphi(t,x)$,使有

$$\varphi(1,x)=f(x) \qquad (\text{对一切 } x\in I)$$

则称 $f(x)$ 可嵌入流(或半流) $\varphi(t,x)$.

如果 f 可嵌入流(或半流) $\varphi(t,x)$,我们令

$$f^\alpha(x)=\varphi(\alpha,x) \tag{3.6}$$

这样就一举得到了 f 的 α 次迭代. α 可遍取实数(或正实数). 根据

流的定义 3.1，由(3.6)确定的$\{f^t\}$是满足(2.1)所示的指数运算律的.

什么样的f可嵌入流或半流?特别是，它能否嵌入连续的流或半流?这是一个饶有兴味而且很有意义的问题.一方面，弄清这个问题，有助于我们认识流的抽样而得的映射究竟有哪些特点.另一方面，它还有重要实际应用：当我们考察自然界的某个连续变化过程时，由于客观条件的限制，往往只能得到一些时间离散的资料.能不能从在离散时间上采集的资料(如数据，图像)中找出因果关系，从而得到关于整个发展过程的更系统的知识，这属于动态模式识别问题.它对于自动控制，人工智能都是很重要的.把这类问题抽象为数学模型之后，其中有一部分问题便可归结为映射嵌入流的问题.

一个流$\varphi(t,x)$中的参数t，有时也可以不表示时间而具有别的物理意义.举个例子：射线穿过介质之后，强度会减弱.设强度为x的射线，穿过厚度为t的介质层之后强度变为y，则y是t和x的函数，设

$$y=\varphi(t,x)$$

容易从物理意义上确信$\varphi(t,x)$是流.要通过实验测定函数$\varphi(t,x)$，工作量是相当大的.特别是，要使t变化，就要准备厚度各不相同的介质层.但我们也可以先对单位厚度的介质来测定x变化时y是如何变化的，得到

$$f(x)=\varphi(1,x)$$

然后，利用数学的方法把$f(x)$嵌入到流$\varphi(t,x)$中.即由$f(x)$确定$\varphi(t,x)$，这就可以用较少的代价得到所要的信息.

下面的定理，可以帮助我们把严格递增的连续函数嵌入连续流.

定理 3.3 若 f 和 G 都是(a,b)上的连续并且严格递增的函数，f 和 G 的值域都是(a,b)，且当 $x \in (a,b)$ 时恒有

$$(f(x) - x)(G(x) - x) \neq 0 \tag{3.7}$$

则有定义于(a,b)，且值域亦为(a,b)的连续而且严格单调的函数 $h(x)$，满足函数方程

$$h \circ f(x) = G \circ h(x) \quad (x \in (a,b)) \tag{3.8}$$

而且当(3.7)左端恒正时 $h(x)$ 必递增，(3.7)左端恒负时 $h(x)$ 必递减. 此外，还可以使 $h(x)$ 满足预先给定的条件

$$h(x) = h^*(x) \quad (x \in [f(x_0), x_0] \text{ 或 } [x_0, f(x_0)]) \tag{3.9}$$

这里 x_0 是(a,b)内任意取定的一点，$h^*(x)$ 是满足等式 $h^* \circ f(x_0) = G \circ h^*(x_0)$ 的任一个在$[f(x_0), x_0]$上(或$[x_0, f(x_0)]$上)连续严格单调的函数，且 $h^*(x_0) \in (a,b)$.

证明 为确定起见，暂设在(a,b)内恒有 $G(x) < x$ 和 $f(x) < x$. 满足(3.7)的另外几种情形，最后均可归结为这一种情形.

令 $y_0 = h^*(x_0)$，作点列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$：

$$\begin{cases} x_n = f^n(x_0) \\ y_n = G^n(y_0) \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots) \tag{3.10}$$

则 $x_n > x_{n+1}$，$y_n > y_{n-1}$，且当 $n \to +\infty$ 时，$x_n \to a$ 且 $y_n \to a$，而当 $n \to -\infty$ 时，$x_n \to b$ 且 $y_n \to b$.

令 $h_0(x) = h^*(x)$，$(x \in [x_1, x_0])$，再取

$$\begin{cases} h_1(x) = G \circ h_0 \circ f^{-1}(x) \quad (x \in [x_2, x_1]) \\ h_{-1}(x) = G^{-1} \circ h_0 \circ f(x) \quad (x \in [x_0, x_{-1}]) \end{cases} \tag{3.11}$$

显然，h_{-1}、h_0、h_1 连续且严格递增(h_0 之所以递增，是因为定理中设 h^* 严格单调且 $h^* \circ f(x_0) = G \circ h^*(x_0)$，由于我们暂设 $f(x) < x$，$G(x) < x$，故 $h^*(f(x_0)) = G(h^*(x_0)) < h^*(x_0)$，由此知 h^* 递增，即 h_0 递增)，并且

$$h_1(x_1)=y_1,\quad h_{-1}(x_0)=y_0 \tag{3.12}$$

一般地，若对自然数 n，在 $[x_{n+1},x_n]$ 和 $[x_{-n+1},x_{-n}]$ 上分别给定了 h_n 和 h_{-n}，它们连续且严格递增，满足

$$\begin{cases}h_n(x_n)=y_n,\quad h_n(x_{n+1})=G(y_n)\\ h_{-n}(x_{-n+1})=y_{-n+1},\quad h_{-n}(x_{-n})=G^{-1}(y_{-n+1})\end{cases} \tag{3.13}$$

则可以归纳地定义

$$\begin{cases}h_{n+1}(x)=G\circ h_n\circ f^{-1}(x),\quad (x\in[x_{n+2},x_{n+1}])\\ h_{-(n+1)}(x)=G^{-1}\circ h_{-n}\circ f(x),\quad (x\in[x_{-n},x_{-(n+1)}])\end{cases} \tag{3.14}$$

然后令

$$h(x)=h_n(x)\quad (当\ x\in[x_{n+1},x_n)) \tag{3.15}$$

易知这个定义是合理的，且 h 连续，严格递增，满足(3.8)

如果在 (a,b) 内恒有 $G(x)>x$ 和 $f(x)>x$，可令

$$\begin{cases}\widetilde{G}(x)=-G(-x)\\ \widetilde{f}(x)=-f(-x)\end{cases} \tag{3.16}$$

则在 $(-b,-a)$ 上有 $\widetilde{G}(x)<x$ 和 $\widetilde{f}(x)<x$. 应用已证之结论，有 $\bar{h}$ 使　$\bar{h}\circ\widetilde{f}=\widetilde{G}\circ\bar{h}$，即

$$\bar{h}(-f(-x))=-G(-\bar{h}(x))$$

于是取 $h(x)=-\bar{h}(-x)$，则 $h\circ f=G\circ h$. 由 $\bar{h}$ 之连续性和严格递增性可知 h 也是连续和严格递增的.

如果(3.7)的左端恒为负，不失一般性，不妨设在 (a,b) 内恒有 $f(x)<x$ 而 $G(x)>x$. 任取一个定义于 (a,b) 且值域亦为 (a,b) 的严格递减连续函数 $h_1(x)$，则易知

$$h_1^{-1}\circ G\circ h(x)=\widetilde{G}(x)<x$$

于是有严格递增的连续函数 h_2 使 $h_2\circ f(x)=\widetilde{G}\circ h_2(x)$，亦即 $h_2\circ f(x)=h_1^{-1}\circ G\circ h_1\circ h_2(x)$，令 $h(x)=h_1\circ h_2(x)$，则 $h(x)$ 是满足 $h\circ f=G\circ h$ 的连续且严格递减的函数.

关于定理中的其余细节，如 $h(x)$ 满足初始条件的可能性，以及它的增减性，其论证是平凡的，请读者验证.

根据这个定理，可得严格递增连续函数迭代根存在性的又一证法：

推论 3.4 若 f 满足定理 3.3 中的条件，则对任意的正整数 $m \geqslant 1$，f 有连续的 m 次迭代根.

证明 令 $G = f^m$，则 f 和 G 满足定理 3.3 中条件. 故有严格单调的连续函数 $h(x)$ 使

$$h \circ f = G \circ h$$

亦即

$$f = h^{-1} \circ G \circ h = h^{-1} \circ f^m \circ h \tag{3.17}$$

取 $g = h^{-1} \circ f \circ h$，由(3.17)知 $f = g^m$. 另外，g 的连续性是显然的. 证毕.

定理3.3还有更大的用处，就是导出下述严格递增连续函数嵌入连续流的结果.

推论3.5 若 f 满足定理 3.3 中的条件，则 f 可嵌入 (a,b) 上的连续流.

证明 任意取定一个定义于 (a,b) 而值域为 $(-\infty, +\infty)$ 的连续的严格单调函数 $h_1(x)$. 令

$$G(x) = h_1^{-1}(h_1(x) + 1) \quad (x \in (a,b)) \tag{3.18}$$

则 $G(x)$ 定义于 (a,b) 且值域为 (a,b). $G(x)$ 显然连续且严格递增. 此外，$G(x)$ 在 (a,b) 上没有不动点，这是因为由(3.18)可知

$$h_1(G(x)) = h_1(x) + 1$$

如果有 x_0 使 $G(x_0) = x_0$，则得

$$h_1(x_0) + 1 = h_1(G(x_0)) = h_1(x_0)$$

这推出 $1 = 0$ 的矛盾.

于是，f 和 G 满足定理 3.3 中的条件，因而有定义于 (a,b) 且值域为 (a,b) 的严格单调连续函数 $h_2(x)$，使有

$$h_2 \circ f(x) = G \circ h_2(x) \quad (x \in (a,b)) \tag{3.19}$$

由(3.18)与(3.19)得

$$\begin{aligned} f(x) &= h_2^{-1} \circ G \circ h_2(x) \\ &= h_2^{-1} \circ h_1^{-1}(h_1 \circ h_2(x) + 1) \end{aligned} \tag{3.20}$$

令 $h(x) = h_1 \circ h_2(x)$，则 h 是定义于 (a,b) 且值域为 $(-\infty, +\infty)$ 的严格单调连续函数，由(3.20) 得

$$f(x) = h^{-1}(h(x) + 1) \tag{3.21}$$

现在令

$$\varphi(t,x) = h^{-1}(h(x) + t) \qquad \begin{pmatrix} -\infty < t < +\infty \\ a < x < b \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

容易检验，φ 是 (a,b) 上的连续流. 由(3.21)知 $f(x) = \varphi(1,x)$，即 f 可嵌入连续流 φ. 证毕.

在定理 3.3 以及推论中，都要求 f 的值域和定义域一样，都是 (a,b). 如果 f 的值域是 (a,b) 的真子集，则 f 在严格的意义下不可能嵌入 (a,b) 上的流，因为 f^{-1} 的定义域不是 (a,b)，而按定义 3.1，$\varphi(-1,x)$ 的定义域应当和 $\varphi(1,x)$ 相同.

但是，这时 f 仍可以嵌入半流：

推论 3.6 设 $f(x)$ 定义于 (a,b) 且取值于 (a,b)，f 严格递增而且连续，对一切 $x \in (a,b)$ 恒有 $f(x) \neq x$. 则 f 可嵌入 (a,b) 上的连续半流.

证明 如果 f 的值域不是 (a,b)，则不等式

$$f(a+0) > a$$

和

$$f(b-0) < b$$

中至少有一个成立. 由于 f 在 (a,b) 内无不动点，故这两个不等式

不能同时成立.(否则,由 $f(a+0)-a>0, f(b-0)-b<0$ 及连续函数的介值定理,可推出有 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)-c=0.$)为确定起见,不妨设 $f(a+0)>a$ 而 $f(b-0)=b.$

任取一个定义于 $(0,+\infty)$ 而值域为 (a,b) 的严格递增且连续的函数 $h_1(x)$,令

$$f_1(x)=h_1^{-1}\circ f\circ h_1(x) \qquad (x\in(0,+\infty)) \qquad (3.23)$$

则 f_1 是 $(0,+\infty)$ 上的严格递增连续函数,易验证 f_1 也没有不动点,$f_1(x)>x, f(0+)>0.$

把 $f_1(x)$ 开拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格递增连续函数 $\tilde{f}_1(x)$,并使 $\tilde{f}_1(x)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$,且 $\tilde{f}_1$ 也没有不动点. 从而对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\tilde{f}_1(x)>x.$ 这当然是办得到的.

应用推论 3.5,$\tilde{f}_1(x)$ 可嵌入 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续流 $\tilde{\varphi}_1(t,x)$ 考虑 $\tilde{\varphi}_1$ 在 $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上的限制 φ_1,易知 φ_1 是 $(0,+\infty)$ 上的连续半流,且 $\varphi_1(1,x)=f_1(x).$ 现在令

$$\varphi(t,x)=h_1(\varphi_1(t,h_1^{-1}(x))) \qquad (x\in(a,b))$$

则 φ 是 (a,b) 上的连续半流,且有

$$\begin{aligned}\varphi(1,x)&=h_1(\varphi_1(1,h_1^{-1}(x)))\\&=h_1\circ f_1\circ h_1^{-1}(x)=f(x)\end{aligned}$$

这说明 f 可嵌入 (a,b) 上的连续半流 φ. 证毕.

在以上的定理及推论中,我们要求 f 没有不动点,这并不失去一般性. 如果 f 有一些不动点,我们可以照搬在上一节末尾建立定理 2.5 时所用的方法,先从 $[a,b]$ 去掉不动点和端点,把剩下的开集分成不超过可数个的开区间 $\{\Delta_n\}$,把 f 在 Δ_n 上的限制 f_n 嵌入 Δ_n 上的流(若 Δ_n 的端点和 a,b 之一重合,也可能是半流)φ_n,最后把诸 φ_n 凑起来得到 $[a,b]$ 上的流或半流 φ,而 f 可嵌入 φ. 这就得到

定理 3.7 定义于区间 I 上的严格递增连续函数 $f(x)$,若取值

于 I,则必可嵌入于 I 上的连续半流. 若 f 的值域为 I,则可嵌入于 I 上的连续流.

这个定理的证明从略.

定理 3.7 是一个比较完整的结果. 但从证明定理 3.3 的过程可见,我们这样得到的流仍有极大的任意性,这是我们要进一步解决的问题.

§4 谢留德函数方程与嵌入流的唯一性

在前两节,我们对于连续而且严格递增的函数 f,证明了它有各次连续的迭代根. 而且更进一步证明了它能够嵌入连续流. 但我们的结果有两个明显的不足之处:

第一,通过逐段拼凑而得到的迭代根和流,尽管可以保证连续性,但不一定光滑,更不用说多次可微了. 如果 f 是 r 阶连续可微的,而且没有不动点,经过相当繁复的计算,确实可以拼凑出 r 阶连续可微的 $h(x)$,$h'(x)\neq 0$,使

$$f(x)=h^{-1}(h(x)+1) \tag{4.1}$$

从而可以把 f 嵌入于 C^r 流 $\varphi(t,x)=h^{-1}(h(x)+t)$,获得 f 的 r 阶连续可微的 m 次迭代根 $f^{\frac{1}{m}}(x)=h^{-1}(h(x)+\frac{1}{m})$. 而且还顺便给出我们在 §1 中提出的写出 f^n 的表达式问题,即 $f^n(x)=h^{-1}(h(x)+n)$. 但是,如果 f 有不动点 $x_0=f(x_0)$,则 φ 和 $f^{\frac{1}{m}}$ 在 x_0 处的可微性仍然得不到保证.

第二,从定理2.3和定理3.3的证明过程还可以看出,我们构造出的迭代根和流都有极大的任意性. 能不能从这许许多多迭代根中和所嵌入的流中挑出一个我们认为是最好的?用什么标准来挑

选?这就是所谓唯一性问题.

比如,在§1当中,我们曾举出过几个这样的函数 $f(x)$(参看(1.14)),$f^n(x)$ 可以写成 n 和 x 的明显的表达式. 把表达式中的 n 换成连续变化的 t,往往可以得到流或半流. 例如:

1° 由 $f(x)=x+a$,得 $f^n(x)=x+na$,把 n 连续化,可得流 $\varphi(t,x)=x+ta(-\infty<x<+\infty)$;

2° 由 $f(x)=cx(c>0,c\neq1)$,得 $f^n(x)=c^nx$,把 n 连续化,得流 $\varphi(t,x)=c^tx(-\infty<x<+\infty)$;

3° 由 $f(x)=x^2$,得 $f^n(x)=x^{2^n}$,把 n 连续化,得流 $\varphi(t,x)=x^{2^t}$;$(0\leqslant x<+\infty)$.

4° 由 $f(x)=\dfrac{x}{1+bx}$,$(b\neq0)$,得 $f^n(x)=\dfrac{x}{1+nbx}$,把 n 连续化,得半流 $\varphi(t,x)=\dfrac{x}{1+tbx}(0\leqslant bx<+\infty)$

这样得到的可被 f 嵌入的半流,看来似乎要自然一些,好一些. 它应当和拼凑出来的其他许多可被 f 嵌入的半流有所区别. 下述定理揭示出这种区别之点:

定理 4.1 设 $f(x)=cx(c>0,c\neq1,x\in(-\infty,+\infty))$ 可嵌入 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续流 $\varphi(t,x)$. 如果对任意固定的 t,$\varphi(t,x)=f^t(x)$ 在 $x=0$ 处可微,则 $\varphi(t,x)=c^tx$.

为了证明该定理及以后用起来方便,我们先给出下面引理.

引理 4.2 设 $g(x)$ 在包含 $x=0$ 的区间 I 上有定义,$g'(0)$ 存在,λ 是绝对值不为 1 的非零常数. 当 $x\in I$ 时恒有 $\lambda x\in I$. 如果对一切 $x\in I$ 有 $g(\lambda x)=\lambda g(x)$,则 $g(x)=g'(0)x$.

证明 若 $|\lambda|<1$,则由 $g(\lambda x)=\lambda g(x)$ 可得 $g(0)=0$, 且

$$g(\lambda^nx)=\lambda^ng(x)$$

故

$$g(x) = \frac{g(\lambda^n x)}{\lambda^n} = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{g(\lambda^n x)}{\lambda^n x}\right)x = g'(0)x$$

若 $|\lambda| > 1$，由 $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ 得 $g(y) = \lambda g\left(\frac{y}{\lambda}\right)$，取 $\lambda^* = \frac{1}{\lambda}$，则 $|\lambda^*| < 1$ 且 $g(\lambda^* y) = \lambda^* g(y)$，即化为已讨论过的情形. 证毕.

定理 4.1 之证明　若 f 可嵌入 $\varphi(t,x)$，则

$$\varphi(1,x) = f(x) = cx$$

由流的定义知

$$\begin{aligned}\varphi(t,cx) &= \varphi(t,\varphi(1,x)) = \varphi(1+t,x)\\ &= \varphi(1,\varphi(t,x)) = f(\varphi(t,x))\\ &= c\varphi(t,x)\end{aligned} \tag{4.2}$$

亦即 $f^t(cx) = cf^t(x)$. 设 $f^t(x)$ 在 $x=0$ 处导数为 a_t，则由引理 4.2 可得 $f^t(x) = a_t x$

由流的定义可得

$$\underbrace{f^{\frac{1}{n}}\circ f^{\frac{1}{n}}\circ\cdots\circ f^{\frac{1}{n}}}_{n\text{ 次}} = f \tag{4.3}$$

两端在 $x=0$ 处求导，得

$$(a_{\frac{1}{n}})^n = c \tag{4.4}$$

由于同理有

$$(a_{\frac{1}{2n}})^2 = a_{\frac{1}{n}}$$

故 $a_{\frac{1}{n}} > 0$，从而

$$a_{\frac{1}{n}} = c^{\frac{1}{n}}$$

于是

$$a_{\frac{m}{n}} = (a_{\frac{1}{n}})^m = c^{\frac{m}{n}} \tag{4.5}$$

对于任一正实数 t，由 $\varphi(t,1)$ 关于 t 连续，可得

$$a_t = \varphi(t,1) = \lim_{u\to t}\varphi(u,1) = \lim_{r\to t} a_r = c^t \tag{4.6}$$

在 (4.6) 中 u 取有理值趋于 t. 若 $t<0$, 由

$$f^{-t}\circ f^{t}(x)=f^{0}(x)=x$$

亦得

$$a_t=(a_{-t})^{-1}=c^t$$

证毕.

定理 4.1 使我们看到,对于 $f(x)=cx$ 而言,尽管它所嵌入的流可以有很大的任意性,但在加上"在 $x=0$ 处 $f^t(x)=\varphi(t,x)$ 可微"的要求之后,却只有我们所中意的 c^tx 这一个流. 注意到 $x=0$ 是 $f(x)=cx$ 的不动点,这启发我们提出"在不动点处可微"的条件. 下面的定理是推广定理 4.1 的准备步骤.

定理 4.3 设 $f(x)$ 是定义于区间 I 而取值于 I 的严格递增连续函数. $f(x)$ 有唯一的不动点 $x_0=f(x_0)\in I$. $f'(x_0)$ 是不等于 1 的正数. 如果存在定义于 I 上的连续的严格单调的函数 $h(x)$, $h'(x_0)$ 存在且不为零,满足函数方程

$$h(f(x))=ch(x)\quad (c=f'(x_0)) \tag{4.7}$$

则有

(i) 任给 $\alpha>0$, 有且仅有一个在 x_0 邻域定义的 $g(x)$, 使

$$\begin{cases} f\circ g(x)=g\circ f(x)\\ g'(x_0)=\alpha \end{cases} \tag{4.8}$$

(ii) 任给正整数 m, 有且仅有一个定义于 I 且在 x_0 可微的递增函数 $g(x)$, 满足

$$g^m(x)=f(x) \tag{4.9}$$

(iii) 有且仅有一个 I 上的连续半流 $\varphi(t,x)$, 使得

$$f(x)=\varphi(1,x) \tag{4.10}$$

并对每个固定的 t, $\varphi(t,x)$ 在 $x=x_0$ 处可微.

证明 若有满足(4.7)的 h, 将 $x=x_0$ 代入(4.7), 得

$$ch(x_0)=h(f(x_0))=h(x_0)$$

由 $c\neq 1$ 即得 $h(x_0)=0, h^{-1}(0)=x_0$. 且有

$$f(x)=h^{-1}(ch(x)) \tag{4.11}$$

以下分别论证定理中的三个结论：

(i) 对于 $a>0$，取 $g(x)=h^{-1}(ah(x))$. 显然 $g(x)$ 在 x_0 邻域有定义，且满足(4.8). 反之，若有满足(4.8)的 $g(x)$，由(4.8)前一式得

$$f(g(x_0))=g(f(x_0)=g(x_0),$$

由于 f 只有一个不动点 x_0，故 $g(x_0)=x_0$，令

$$G(x)=h\circ g\circ h^{-1}(x) \tag{4.12}$$

则 $G(0)=0, G'(0)=g'(x_0)=a$，把(4.11)和(4.12)代入(4.8)，得

$$cG(x)=G(cx)$$

由引理 4.2 可知，$G(x)=G'(0)x=ax$，再由(4.12)，得

$$g(x)=h^{-1}\circ G\circ h(x)=h^{-1}(ah(x))$$

这证明了满足(4.8)的 g 的唯一性.

(ii) 取 $g(x)=h^{-1}(c^{\frac{1}{m}}h(x))$，由 $h'(x_0)\neq 0$ 及(4.11)可知，$g'(x_0)$存在且 $g^m(x)=f(x)$.

反过来，若 $g^m(x)=f(x)$，则必有 $g\circ f=f\circ g$，再由 $g'(x_0)$存在，得

$$g'(x_0)=(f'(x_0))^{\frac{1}{m}}=c^{\frac{1}{m}}$$

由(i)知这样的 g 是唯一的.

(iii) 取 $\varphi(t,x)=h^{-1}(c^th(x))$，易知 φ 是所要的半流，实际上，若 f 的值域也是 I，φ 也是流.

反之，若 f 可嵌入 I 上的半流 $\varphi(t,x)$，φ 连续且对固定的任一 t 值 $\varphi(t,x)=f^t(x)$在 $x=x_0$ 处可微，令

$$\Phi(t,x)=h(\varphi(t,h^{-1}(x))) \tag{4.15}$$

Φ 显然是连续半流，且对任一 t 值易验证

$$\Phi'_x(t,x)\big|_{x=0}=\frac{d}{dx}f^t(x)\big|_{x=x_0} \tag{4.16}$$

此外，由(4.7)

$$\Phi(1,x)=h(\varphi(1,h^{-1}(x)))=h\circ f\circ h^{-1}(x)=cx$$

即 $F(x)=cx$ 可嵌入 Φ，由定理 4.1，

$$\Phi(t,x)=c^tx$$

从而由(4.15)得 $\varphi(t,x)=h^{-1}(c^th(x))$. 证毕.

定理 4.3 说明了(4.7)式的函数方程

$$h(f(x))=ch(x) \qquad (c=f'(x_0),f(x_0)=x_0)$$

的重要性. 这个方程是谢留德(E. Schröder)在 1871 年发表的一篇文章[1]中提出来的. 其目的正是为了利用 $h(x)$ 把 f 的迭代的明显表达式写出来，以及求 f 的迭代根.

为了使定理 4.3 落实，研究 *Schröder* 方程的可微解，便成为必要的了.

定理 4.4 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续可微，当 $x\in I$ 时有 $f(x)\in I$，$f(f(x))$ 在 I 上有唯一不动点 $x_0=f(f(x_0))$，$f''(x_0)$ 存在，$0<|f'(x_0)|<1$. 则存在定义于 I 上的连续可微函数 $h(x)$，$h'(x_0)\neq 0$，满足 *Schröder* 函数方程

$$h(f(x))=ch(x) \qquad (c=f'(x_0))$$

并且当 f 严格单调时，h 也严格单调，当 $f'(x)$ 处处不为零时，$h'(x)$ 亦处处不为零.

证明 首先指出，x_0 也是 f 的唯一不动点. 因为若有 $f(x_0)=x_1\neq x_0$，则因

$$f(f(x_1))=f(f(f(x_0)))=f(x_0)=x_1$$

可见 x_1 也是 $f(f(x))$ 的不动点，此与 $f(f(x))$ 不动点唯一性矛盾. 另外，因 f 的不动点也必是 f^2 的不动点，故 f 只有唯一不动点 x_0.

由于 $0<|f'(x_0)|<1$，故有 $\delta>0$，使对 $q=\dfrac{1+|f'(x_0)|}{2}$ 有

$$|f(x)-f(x_0)|<q|x-x_0| \quad (\text{当 } |x-x_0|<\delta) \tag{4.16}$$

又因 $f''(x_0)$ 存在，故可设 δ 已足够小，致使

$$|f'(x)-c|=|f'(x)-f'(x_0)|<M|x-x_0| \tag{4.17}$$

$$(|x-x_0|<\delta, M=|f''(x_0)|+1)$$

考虑函数序列

$$h_n(x)=c^{-n}(f^n(x)-x_0) \qquad (n=0,1,2\cdots) \tag{4.18}$$

我们指出，无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x)-h_n(x))$ 在 x_0 的足够小的邻域 $(x_0-\delta^*, x_0+\delta^*)\cap I$ 上一致收敛并可以逐项求导. 这里只要 $0<\delta^*<\delta$ 且 δ^* 足够小，以至 $(|c|+M\delta^*)q<|c|$ 即可.

事实上，取 $x=x_0$ 时，有 $h_n(x_0)=0$，故该级数收敛于零，剩下是证明逐项求导后得到的级数一致收敛. 显然有

$$\begin{aligned}
|(h_{n+1}(x)-h_n(x))'| &= |c^{-n}|\cdot|c^{-1}(f^{n+1}(x))'-(f^n(x))'| \\
&= |c|^{-n}\cdot|(f^n(x))'|\cdot|c^{-1}f'(f^n(x))-1| \\
&= |c|^{-n-1}\cdot|f'(f^{n-1}(x))\cdot f'(f^{n-2}(x))\cdots f'(x)|\cdot|f'(f^n(x))-c|
\end{aligned} \tag{4.19}$$

当 $|x-x_0|<\delta^*$ 时，对(4.19)应用估值(4.16)和(4.17)，注意到由(4.16)可推得

$$|f^n(x)-x_0|<q^n|x-x_0| \qquad (|x-x_0|<\delta) \tag{4.20}$$

便得

$$\begin{aligned}
|(h_{n+1}(x)-h_n(x))'| &< |c|^{-(n+1)}(|c|+M\delta^*)^n\cdot M|f^n(x)-x_0| \\
&< M\delta^*|c|^{-1}\cdot(|c|^{-1}q(|c|+M\delta^*))^n
\end{aligned} \tag{4.21}$$

由于 δ^* 的取法使 $|c|^{-1}q(|c|+M\delta^*)<1$，由柯西判别法知，该级数逐项微分后绝对一致收敛，令

$$h(x)=(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x)-h_n(x))$$

$$=h_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x)-h_n(x))$$

$$=\lim_{n\to+\infty}h_n(x)=\lim_{n\to+\infty}c^{-n}(f^n(x)-x_0) \tag{4.22}$$

则 h 在 $(x_0-\delta^*,x_0+\delta^*)\cap I$ 上连续可微，易求出 $h'(x_0)=1$. 由于

$$h(f(x))=\lim_{n\to+\infty}c^{-n}(f^{n+1}(x)-x_0)$$

$$=c\lim_{n\to+\infty}c^{-(n+1)}(f^{n+1}(x)-x_0)$$

$$=ch(x) \tag{4.23}$$

这证明了 $h(x)$ 是 f 所对应的 Schröder 方程(4.7)的解.

下面进一步证明，h 可以保持连续可微地开拓为方程(4.7)在整个区间 I 上的解. 为此要证明，对一切 $x\in I$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=x_0 \tag{4.24}$$

首先，若 x_0 是 I 的端点，由 f 的不动点的唯一性，显然(4.24)成立.

以下讨论 x_0 是 I 的内点的情形. 由(4.16)可知，有一个包含点 x_0 的区间，使这个区间内的一切 x 满足(4.24). 设 I^* 是满足下列条件的最大区间：

(i) $x_0\in I^*$；

(ii) 若 $x\in I^*$，则 x 满足(4.24).

设 I^* 的两端点是 u,v，我们来证 u,v 是 I 的端点，从而 $I^*=I$.

f 显然把 I^* 变为含 x_0 的区间，若 x 满足(4.24)，$f(x)$ 亦满足，故 $f(I^*)\subset I^*$. 另一方面，如果 u(或 v)不是 I 的端点而是内点，则 $f(u)$ 不是 I^* 的内点. 这是因为若 $f(u)$ 是 I^* 的内点，则必有一个 u 的邻域 Δu，使 $f(\Delta u)$ 都是 I^* 的内点. 这说明 Δu 中的点 x 都满足(4.24)，从而 $\Delta u\subset I^*$，这和 u 为 I^* 的端点矛盾，于是 f 把 I^* 的两端点变为端点. 但 u,v 都不是 f 的不动点，只可能是 $f(u)=v$，$f(v)=u$.

这样 u,v 都是 $f(f(x))$ 的不动点，又与假设矛盾.(4.24)得证.

于是，对任意 $x\in I$，总可以找到一个最小的非负整数 n，使 $f^n(x)\in(x_0-\delta,x_0+\delta^*)\cap I$，从而 $h(f^n(x))$ 有定义.令

$$h(x)=c^{-n}h(f^n(x)) \tag{4.25}$$

这就把 h 拓广到了整个 I 上，这样定义的 h 显然具有连续导数，并满足方程(4.7).

最后，我们由 f 严格单调推出 h 也严格单调.若不然，有 $x_1\neq x_2$，使 $h(x_1)=h(x_2)$，由(4.7)知 $h(f^n(x_1))=h(f^n(x_2))$.但当 $n\to+\infty$ 时有 $f^n(x_i)\to x_0(i=1,2)$.由 f 严格单调可知 $f^n(x_1)\neq f^n(x_2)$，这说明 h 在 x_0 邻域不是严格单调的.这与 h 有连续导数且 $h'(x_0)=1$ 矛盾.

若 $f'(x)$ 处处不为零，由(4.7)微分后可知，若 $h'(x)=0$，则 $h'(f(x))=0$，从而 $h'(f^n(x))=0$.由 $f^n(x)\to x_0(n\to+\infty)$ 及 h' 的连续性，得 $h'(x_0)=0$，这与 $h'(x_0)=1$ 矛盾，这证明了 $h'(x)$ 处处不为零，证毕.

注意，若 $h(x)$ 是(4.7)的解，则对任意 $\lambda\neq0$，$\lambda h(x)$ 也是(4.7)的解.另一方面，若 h 和 h_1 都是(4.7)的解，且 $h'(x_0)$，$h_1'(x_0)$ 都存在且非零，则由(4.7)得

$$\frac{h(x)}{h_1(x)}=\frac{h(f^n(x))}{h_1(f^n(x))}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{h(f^n(x))}{f^n(x)-x_0}\right|\left|\frac{f^n(x)-x_0}{h_1(f^n(x))}\right|$$

$$=\frac{h'(x_0)}{h_1'(x_0)} \tag{4.26}$$

可见，我们已经得到(4.7)的全部在 x_0 处有非零微商的解.从(4.26)看出，若 $h_1'(x_0)\neq0$ 而 $h'(x_0)=0$，则 $h(x)\equiv0$.

此外，由(4.7)还可看出

$$h(x)=\frac{h(f(x))}{c}=\frac{h(f^n(x))}{c^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{h(f^n(x))}{c^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{h(f^n(x))}{f^n(x)-x_0} \cdot \frac{f^n(x)-x_0}{c^n}$$

$$= h'(x_0) \lim_{n\to+\infty} c^{-n}(f^n(x)-x_0) \tag{4.27}$$

这说明，如果(4.7)有在 x_0 处微商非零的解的话，我们总能用定理4.4中的方法——用(4.18)的序列 $c^{-n}(f^n(x)-x_0)$ 逼近——来得到它.

把定理4.3和定理4.4结合起来，比较令人满意地解决了一类函数的迭代根的存在唯一性问题，以及嵌入流的唯一性问题. 我们把结论叙述为：

定理4.5 设 f 在区间 I 上满足下列条件：

1° $f'(x)$在 I 上连续，且对一切 $x\in I$，$f'(x)>0$；

2° f 在 I 上有唯一不动点 $f(x_0)=x_0$，$f'(x_0)\neq 1$；

3° $f''(x_0)$存在；

4° 对一切 $x\in I$，有 $f(x)\in I$.

则有下列诸结论：

(i) 对任给的 $\lambda_t=(f'(x_0))^t(t\geqslant 0)$，有唯一的连续可微函数 g_t，满足

$$\begin{cases} g'_t(x_0)=\lambda_t \\ g_t\circ f(x)=f\circ g_t(x) \qquad (x\in I) \end{cases} \tag{4.28}$$

如果 $f(I)=I$，则 t 可以取全体实数.

(ii) 对任意正整数 m，f 在 I 上有唯一的连续可微的 m 次迭代根.

(iii) f 在 I 上可以唯一地嵌入连续可微的半流 $\varphi(t,x)$. 如果 $f(I)=I$，则 $\varphi(t,x)$也是流.

定理4.5的证明留给读者，请注意这里的条件 $f'(x)>0$ 和不动点的唯一性在一起，可推出定理4.4中的条件"f^2 有唯一不动

点". 另外,由 2°易知,若 $f'(x_0)>1$,必能推出 $f(I)=I$,否则 4°不成立. 这样,当 $f'(x_0)>1$ 时,可以对 f^{-1} 应用定理 4.4,同样可得到方程(4.7)的解.

读者会想到进一步的问题:如果 f 没有不动点呢?如果 f 在不动点的导数 $f'(x_0)=0$ 或 1 呢?如果 f 有两个以上的不动点呢?如果 f 不是严格递增的呢?如果 I 不是区间而是平面的区域呢?

这些问题是有趣的,而且确已有一些人对它们进行了研究. 有关的情形简介及文献资料,有兴趣的读者请参看本章末尾的说明及本书所附参考文献.

§5　迭代与方程求根

前几节中可以看到,哪怕是一个很简单的函数 f,想把它的迭代 f^n 的明显表达式写出来,也不容易. 定理 4.4 虽然给我们提供一个构造谢留德方程的可微解 $h(x)$ 的方法. 利用 h 可写出

$$f^n(x)=h^{-1}(c^n h(x)) \tag{5.1}$$

但是,h 又是用无穷级数形式给出来的,这个无穷项的表达式中,偏偏又用到了 f^n. 所以,在解决实际问题时,这个定理的效能不是很大.

既然很难写出 f^n 的准确的明显表达式,我们只好通过其他途径来研究 f^n 的性状. 比方说给定一个 x,研究序列

$$x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots \tag{5.2}$$

的性质. 诸如,当 $n\to\infty$ 时,它是否存在有限的极限? 如果有极限,怎么求这个极限? 如果没有极限,它是反复跳跃呢还是趋于无穷? 趋于无穷时,它的阶又是多大? 反复跳跃时,它的分布又有什么规

律？当 x 或 f 慢慢改变时，序列(5.2)的性质又如何跟着改变？等等．这样定性地对 f^n 进行研究，近年来正在蓬勃发展，得到了极其丰富而有趣的成果．

序列(5.2)叫做 f 的从 x 出发的正向迭代轨道，用记号 $O_f^+(x)$ 来表示：

$$O_f^+(x)=\{x,f(x),f^2(x),\cdots f^n(x),\cdots\} \tag{5.3}$$

最容易提出的问题是：什么条件下，$O_f^+(x)$有确定的极限？这个极限是什么数？

显然有

定理 5.1 设 $f(x)$在 I 上连续，$x\in I$ 使(对一切非负整数 n) $f^n(x)$有意义．如果

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x)=x_* \tag{5.4}$$

当 $x_*\in I$ 时，x_*必为 f 的不动点．证略．

定理 5.1 告诉我们：对于连续函数 f，(5.3)的极限如果存在，通常这个极限是方程

$$f(x)-x=0 \tag{5.5}$$

的根．(5.3)与(5.5)的这种联系，对我们有两种好处．首先，我们可以利用(5.3)来计算方程(5.5)的根．这种迭代求根的方法已得到广泛的应用．另一方面，又可以利用方程(5.5)来求序列(5.3)的极限．下面两个例子，是大家熟知的

例 5.2 设 $a>0,m>1$ 是正整数．令

$$f(x)=\frac{1}{m}\left\{(m-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}\right\} \quad (x>0) \tag{5.6}$$

则对一切 $x\geqslant a^{\frac{1}{m}}$有

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x)=\sqrt[m]{a} \tag{5.7}$$

证明 当 $x \geqslant a^{\frac{1}{m}}$ 时，有 $x^m \geqslant a$，即 $x \geqslant \frac{a}{x^{m-1}}$，故

$$x = \frac{1}{m}((m-1)x + x) \geqslant \frac{1}{m}\left((m-1)x + \frac{a}{x^{m-1}}\right) = f(x) \tag{5.8}$$

另一方面，根据平均不等式，当诸 $c_i \geqslant 0$ 时，有

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_m}{m} \geqslant (c_1 c_2 \cdots c_m)^{\frac{1}{m}} \tag{5.9}$$

在(5.9)中取 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-1} = x^m, c_m = a$，得

$$\frac{1}{m}((m-1)x^m + a) \geqslant (ax^{m(m-1)})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}}\ x^{m-1}$$

亦即当 $x > 0$ 时，恒有

$$f(x) = \frac{1}{m}\left((m-1)x + \frac{a}{x^{m-1}}\right) \geqslant a^{\frac{1}{m}} \tag{5.10}$$

于是由(5.8)与(5.10)知，$\{f^n(x)\}$ 当 $x \geqslant a^{\frac{1}{m}}$ 时单调递减而且有下界 $a^{\frac{1}{m}} > 0$，故(5.7)有正的极限 x_*. 由定理 5.1，x_* 满足

$$x_* = f(x_*) = \frac{1}{m}\left((m-1)x_* + \frac{a}{x_0^{m-1}}\right)$$

即 $x_* = \sqrt[m]{a}$. 证毕.

例 5.2 提供了一个有效的开方的方法. 后面的分析将指出它能用次数不多的计算给出 $\sqrt[m]{a}$ 的很好的近似值.

例 5.3 求序列

$$\sqrt{b}, \sqrt{a + \sqrt{b}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{b}}}, \cdots, a_n, \sqrt{a + \sqrt{a_n}}, \cdots \tag{5.11}$$

的极限. 这里 $a > 0, b \geqslant 0$.

解 令 $f(x) = \sqrt{a + x} \quad (x \geqslant -a)$，则序列(5.11)可以写成形式

$$\{a_n = f^n(x), x = b - a, n = 1, 2, \cdots\} \tag{5.12}$$

因此，若(5.11)有极限 $x_* \in [-a, +\infty)$，则 x_* 应当是方程

$$\sqrt{a + x} = x \tag{5.13}$$

的根．即方程 $x^2 = a + x$ 的根．解得

$$x_* = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} \tag{5.14}$$

但 $f(x)$ 恒取正值，故只有 $x_* = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a})$

但(5.11)是否有极限？这是应当证明的：

由于 $f(x)$ 在 $[-a, +\infty)$ 上连续递增，只有一个不动点 x_* 当 $x = 0$ 时 $f(x) - x > 0$，当 $x = a + 1$ 时 $f(x) - x < 0$，故有

$$\begin{cases} f(x) > x & (\text{当 } x \in [-a, x_*)) \\ f(x) < x & (\text{当 } x \in (x_*, +\infty) \end{cases} \tag{5.15}$$

故当 $x \leqslant x_*$ 或 $x \geqslant x_*$ 时，序列(5.12)均单调有界，即(5.11)单调有界，从而极限存在．证毕．

设 $f(x_*) = x_*$ 有一邻域 Δ，使对一切 $x \in \Delta$ 有 $f^n(x) \to x_*$，则称 x_* 是稳定不动点．若仅有这样的半邻域 Δ，则称 x_* 是半边稳定的(具体一点，还可说左半(或右半)稳定)．若对 I 上一切 x 有 $f^n(x) \to x_*$，则说 x_* 在 I 上是 f 的全局稳定不动点．这时，也说 f 在 I 上全局稳定．

定理 5.4 设 $f(x)$ 在 I 上连续，且 $f(I) \subset I$，则关于 $\{f^n(x)\}$ 的收敛性，有下列诸判别方法：

情形 1． 若 f^2 在 I 上仅有一个不动点 x_*，x_* 是稳定的或是 I 的端点而半边稳定，则 x_* 是全局稳定的．特别地，递增函数 f 的唯一不动点，若稳定，必为全局稳定．

情形 2． 若 f 在 I 内无不动点，若有 $x_0 \in I$ 使 $f(x_0) > x_0$ ($< x_0$)，则对一切 I 的内点 x，$f^n(x)$ 趋于 I 的右(左)端点．

情形 3.　若 f 在 I 上非减，对任一 $x\in I$，若 $f(x)>x(<x)$，则 $f^n(x)$ 趋于右(左)边离 x 最近的不动点或当 x 右(左)边无不动点时趋于 I 的右(左)端点.

情形 4.　若 I 为闭区间，且对 I 的任两点 $x_1\neq x_2$ 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2| \tag{5.16}$$

则 f 在 I 上有唯一不动点 x_*，且 x_* 是全局稳定的.

情形 5.　$f(x_*)=x_*$ 且 $|f'(x_*)|<1$，则 x_* 是稳定的不动点.(若为 I 的端点，则半边稳定). 反之，$|f'(x_*)|>1$ 时，x_* 不是稳定的.

情形 6.　$f(x_*)=x_*$，且对任一 $x\in I, x\neq x_*$ 有

$$|f(x)-f(x_*)|<|x-x_*|$$

则 x_* 是全局稳定的.

证明　情形 1 的证明，已在定理 4.4 中，在证明(4.24)时给出，不再重复.

情形 2. 注意到 $f^n(x)$ 必为单调数列，如果它的极限点 $x_*\in I$，则必有 $f(x_*)=x_*$. 但 f 在 I 内无不动点，故断言显然.

情形 3. 是情形 2 的特例.

情形 4. 设 $I=[a,b]$，由 $f(I)\subset I$ 知，$f(a)-a\geqslant 0$ 而 $f(b)-b\leqslant 0$，由连续函数的介值定理知，有 $x_*\in I$ 使 $f(x_*)=x_*$. 这样的 x_* 一定唯一，否则，若有 $x_1\neq x_*$ 也使 $f(x_1)=x_1$，则

$$|f(x_*)-f(x_1)|=|x_*-x_1|$$

这与所给条件矛盾.

由

$$\begin{aligned}|f^{n+1}(x)-x_*|&=|f^{n+1}(x)-f^{n+1}(x_*)|<|f^n(x)-f^n(x_*)|\\&=|f^n(x)-x_*|\end{aligned} \tag{5.17}$$

可见，序列 $|f^n(x)-x_*|$ 是递减序列. 若 $|f^n(x)-x_*|\to 0$，断言已真.

若 $|f^n(x)-x_*|\to B>0$，则序列 $\{f^n(x)\}$ 的极限点 u 将满足等式

$$|f(u)-f(x_*)|=|u-x_*|=B>0$$

这又与所给条件矛盾.

情形 5. 由 $|f'(x_*)|<1$，故有 x_* 的邻域 Δ，使当 $x\in\Delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*}\right|\leqslant q=\frac{1}{2}(1+|f'(x_*)|)<1 \quad (5.18)$$

由 $f(I)\subset I$，不妨设 Δ 取得使 $f(\Delta)\subset\Delta$，由(5.18)得

$$|f^n(x)-x_*|\leqslant q^n|x-x_*| \qquad (\text{当 } x\in\Delta)$$

即得 $f^n(x)\to x_*$.

情形 6. 证明和情形 4 的后半部相同. 证毕.

通常情形之下，定理 5.4 已经够用了. 由于实际中碰到的多是可微函数，故情形 5 用得最多.

知道 $f^n(x)\to x_*$ 之后，我们当然会进一步问：当 n 增大时，误差 $|f^n(x)-x_*|$ 是不是会很快地减小？下面就来探讨这个问题.

定理 5.5　设序列 $\{f^n(x)\}$ 收敛于 f 的不动点 x_*，则

(i)　若在某个包含 x_* 的区间 Δ 上有 $|f'(x)|\leqslant q<1$，则当 $x\in\Delta$ 时，有 $|f(x)-x_*|\leqslant q|x-x_*|$. 因而若对一切 $n\geqslant n_0$ 有 $f^n(x)\in\Delta$，则

$$|f^{n+n_0}(x)-x_*|\leqslant q^n|f^{n_0}(x)-x_*| \quad (5.19)$$

(ii)　若在某个包含 x_* 的区间 Δ 上有 $|f^{(k)}(x)|\leqslant M$，$(k\geqslant 2)$ 且 $f^{(j)}(x_*)=0$（当 $j=1,2\cdots,k-1$）. 则当 $x\in\Delta$ 时，有

$$|f(x)-x_*|\leqslant M|x-x_*|^k \quad (5.20)$$

因而若对一切 $n\geqslant n_0$ 有 $f^n(x)\in\Delta$，则

$$|f^{n+n_0}(x)-x_*|\leqslant M^{1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}}|f^{n_0}(x)-x_*|^{k^n} \quad (5.21)$$

这个定理的证明是初等分析的简单习题，从略.

在(i)的情形下，我们说 $\{f^n(x)\}$ 有线性敛速. 在(ii)的情形下，

说 $\{f^n(x)\}$ 有 k 阶敛速. 当 n 很大或 $|x-x_*|$ 很小时，二阶敛速比线性敛速收敛得更快. $k+1$ 阶敛速要比 k 阶敛速收敛得更快，这都是显然的.

现在分析一下例 5.2 中序列(5.7)：

$$\{f^n(x)\},\quad \left\{f(x)=\frac{1}{m}\left((m-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}\right)\right\}$$

由于

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{m-1}{m}\left(1-\dfrac{a}{x^m}\right) \\ f'(x_*)=0 \quad (x_*=\sqrt[m]{a}) \\ f''(x)=\dfrac{m-1}{m}\left(1+\dfrac{ma}{x^{m+1}}\right) \end{cases} \tag{5.22}$$

可见，序列(5.7)是二阶敛速的迭代序列.

如果取

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x^{m-1}}\right)\qquad (x>0) \tag{5.23}$$

或者更一般地

$$g(x)=\frac{1}{l}\left((l-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}\right)\quad (l>1)(x>0) \tag{5.23}$$

则 $g(x)$ 仍然只有一个不动点 $x_*=a^{\frac{1}{m}}$. 由于

$$\begin{cases} g'(x)=\dfrac{1}{l}\left((l-1)-\dfrac{(m-1)a}{x^m}\right) \\ g'(a^{\frac{1}{m}})=\dfrac{1}{l}(l-m)=1-\dfrac{m}{l} \end{cases} \tag{5.24}$$

显然，如果 $\left|1-\frac{m}{l}\right|\geqslant 1$，序列 $g^n(x)$ 不会收敛于 $x^*=a^{\frac{1}{m}}$（除非从某个 n_0 开始有 $g^{n_0}(x)=x_*$）. 如果 $0<\left|1-\frac{m}{l}\right|<1$，则 $\{g^n(x)\}$ 将有线性敛速. 只有 $m=l$ 时，才得到以二阶敛速趋于 $a^{\frac{1}{m}}$ 的序列.

对于例 5.3 中的序列(5.11)：

$$\{f^n(x), n = 1,2,\cdots, x = b - a\}$$

这里 $f(x)=\sqrt{a+x}$，而唯一不动点

$$x^* = f(x^*) = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 1$$

故

$$f'(x^*) = \frac{1}{2\sqrt{a+x^*}} = \frac{1}{2x^*} < \frac{1}{2} \tag{5.25}$$

由定理 5.5 知$\{f^n(x)\}$在接近 x^* 时以线性敛速收敛. 每迭代一次，误差要减少一半以上. a 越大，收敛得越快.

通常，所给的方程并不一定是形式(5.5)：

$$f(x) - x = 0$$

的样子，为了用迭代方法求根，常常要把它加以改写. 假定要求方程

$$F(x) = 0 \tag{5.26}$$

的根. 我们可以适当选取一个函数 $\lambda(x)$，令

$$f(x) = x + \lambda(x)F(x) \tag{5.27}$$

则 $f(x)$的不动点 x_* 满足

$$x_* = x_* + \lambda(x_*)F(x_*) \tag{5.28}$$

因此，只要 $\lambda(x_*)\neq 0$，x_* 一定是(5.26)的根，但是，能不能用迭代的方法找到这个根呢？

定理 5.6 若 $F(x)$在 I 上连续可微，I 的内点 x_* 是方程(5.26)的根. 如果 I 上的连续可微函数 $\lambda(x)$满足

$$-2 < \lambda(x_*)F'(x_*) < 0 \tag{5.29}$$

则对(5.27)中的 f，x_* 是稳定不动点. 对于足够接近 x_* 的点 x，$f^n(x)$趋于 x_* 的敛速至少是线性的. 如果有

$$\lambda(x_*)F'(x_*) = -1 \tag{5.30}$$

并且 $F''(x)$和 $\lambda''(x)$都存在而且连续，则 $f^n(x)$趋于 x_*的敛速至少是二阶的.

证明　由(5.29)可得$|f'(x_*)|<1$. 由于 x_*是 I 的内点，可见，存在 x_*的邻域 Λ 使 $f(\Lambda)\subset\Lambda$. 由定理 5.4 的情形 5，知 x_*是 f 的稳定不动点. 再用定理 5.5 的(i)，知道 $f^n(x)$有线性敛速.

若(5.30)成立，则 $f'(x_*)=0$. 又由 F''及 λ''连续，得 f''连续，再用定理 5.5 之(ii)，即知 $f^n(x)$有二阶敛速. 证毕.

由定理 5.6 可知，在利用(5.27)的迭代求 $F(x)=0$ 的根 x_*时，为了收敛得快，应当有(5.30)：$\lambda(x_*)F'(x_*)=-1$. 但这时我们还不知道 x_*，又怎么知道 $F'(x_*)$呢？有一个办法是干脆取 $\lambda(x)=-(F'(x))^{-1}$，只要 $F'(x_*)$不为零，即 x_*不是(5.26)的重根，总有 $\lambda(x_*)F'(x_*)=-1$. 这时

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \tag{5.31}$$

这就是被广泛使用的牛顿法. 通常写成形式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \tag{5.32}$$

这里 $x_n=f^n(x_0)$，x_0 是迭代的始点. 若 F''连续，(5.32)有二阶敛速. 既快，又方便.

如果想要得到三阶敛速的迭代序列，又该怎么取 $\lambda(x)$呢？

按定理 5.5，应当有 $f'(x_*)=f''(x_*)=0$. 由于

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \lambda'(x)F(x) + F'(x)\lambda(x) \\ f''(x) = \lambda''(x)F(x) + 2\lambda'(x)F'(x) + \lambda(x)F''(x) \end{cases} \tag{5.33}$$

注意到 $F(x_*)=0$，故为了 $f'(x_*)=f''(x_*)=0$，应有

$$\begin{cases} \lambda(x_*)F'(x_*) = -1 \\ 2\lambda'(x_*)F'(x_*) + \lambda(x_*)F''(x_*) = 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

设

$$\lambda(x) = -\frac{1}{F'(x)}(1 + \mu(x)F(x)) \tag{5.35}$$

这里 $\mu(x)$ 待定. 显然(5.35)使(5.34)的前一式成立. 由(5.35)得

$$\lambda(x)F'(x) = -(1 + \mu(x)F(x))$$

求导,得

$$\lambda'(x)F'(x) + \lambda(x)F''(x) = -\mu(x)F'(x) - \mu'(x)F(x)$$

令 $x=x_*$,两端乘 2,再用(5.34)第二式条件,得

$$\lambda(x_*)F''(x_*) = -2\mu(x_*)F'(x_*)$$

$$\therefore \mu(x_*) = \frac{\lambda(x_*)F''(x_*)}{-2F'(x_*)} = \frac{F''(x_*)}{2[F'(x_*)]^2} \tag{5.36}$$

于是得

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{F''(x)}{[F'(x)]^2}\right) \tag{5.37}$$

这是牛顿法的改进. $f^n(x)$ 以至少三阶的敛速趋于 x_*.

用类似的方法,可以得到有更高阶敛速的迭代序列.

从定理 5.5 开始,我们所讨论的迭代序列,都是只证明了局部收敛性,也就是说,只有初始值 x 和根 x_* 相当接近时,才能保证 $f^n(x) \to x_*$. 现在进一步问:对于给定的方程 $F(x)=0$,能不能构造一个这样的 $f(x)$,使得不管取什么样的 x,序列 $f^n(x)$ 都收敛到 $F(x)=0$ 的根呢? 回答是肯定的.

定理 5.6 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微,且有

$$|F'(x)| + |F(x)| < M \quad (对一切\ x \in [a,b]) \tag{5.38}$$

取 $\lambda(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一个连续可微函数,满足

$$0 < \lambda(x) < \frac{1}{M};\ |\lambda'(x)| < \frac{1}{M} (对一切\ x \in [a,b]) \tag{5.39}$$

令

$$\begin{cases} f(x) = x + \lambda(x)F(x) \\ g(x) = x - \lambda(x)F(x) \end{cases} \tag{5.40}$$

则对任意 $x_0 \in [a,b]$，当 $F(x_0)>0$ 时，$f^n(x_0)$（$g^n(x_0)$）收敛于 x_0 右（左）边的，$F(x)=0$ 的根；当 $F(x_0)<0$ 时，$f^n(x_0)$（$g^n(x_0)$）收敛于 x_0 左（右）边的，$F(x)=0$ 的根.（如果在 x_0 的右边（左边）或左边（右边）没有 $F(x)=0$ 的根，则 $f^n(x_0)$（$g^n(x_0)$）当 n 足够大时无意义.）

证明 由(5.40)得

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \lambda'(x)F(x) + \lambda(x)F'(x) \\ g'(x) = 1 - \lambda'(x)F(x) - \lambda(x)F'(x) \end{cases} \tag{5.41}$$

再用(5.38)及(5.39)，可得 $f'(x)>0$，$g'(x)>0$，故 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的严格递增函数. 根据定理 5.4 的情形 3，定理的断言显然：因 $F(x_0)>0$ 时，必有 $f(x_0)>x_0$（$g(x_0)<x_0$），故若在 x_0 右边（左边）有 x_* 使 $F(x_*)=0$ 且在 $[x_0,x_*)$ 上 $F(x)>0$ 时，$f^n(x_0)$（$g^n(x_0)$）必然递增（递减）地趋于 x_*，因 x_* 是 $f(x)$ 的在 x_0 右（左）边最近的不动点. 其他情形类似可证. 证毕.

迭代法是广泛用于数值计算和理论证明的一种手段. 它还可以用于求方程组的根，求极大极小，计算微分方程的解，以及证明某些数值方程或函数方程解的存在性. 有兴趣的读者，可进一步阅读有关计算方法的教程中有关的部分.

§6 迭代函数的渐近估值

在上一节，一开始我们便提到，在大多数情形下，$f^n(x)$ 的明显的分析表达式是无法写出来的. 我们只好直接对序列 $\{f^n(x)\}$ 进行定性的分析. 并且研究了 $f^n(x)$ 收敛于确定的极限的种种条件. 定

理 5.5 还给出了粗略的误差估计.

现在,我们来作进一步的分析:当 $f^n(x)$ 收敛或趋于 ∞ 时,怎样对 $f^n(x)$ 作出更精细的渐近估值?

$f^n(x)$ 收敛时,不妨只研究 $f^n(x)\to 0$ 这一种情形. 因为若 $f^n(x)\to a\neq 0$,可令 $F(x)=f(x+a)-a$,则有 $F^n(x)=f^n(x+a)-a$,于是由 $f^n(x)\to a$ 可知 $F^n(x)\to 0$. 对 $F^n(x)$ 作了渐近估值之后,再由关系

$$f^n(x) = F^n(x-a)+a$$

得到 f^n 的渐近估值.

因此,我们只研究两种情形:$f^n(x)\to 0$ 和 $f^n(x)\to +\infty$. 其中较重要的情形,是 $f^n(x)\to 0$,且 $|f'(0)|<1$ 的情形:

定理 6.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,f^2 有唯一不动点 $x=0=f(0)\in[a,b]$,$f[a,b]\subset[a,b]$,且 $0<|f'(0)|<1$,则

1° 对任给的 $\varepsilon>0$,有 $M>0$,使有

$$|f^n(x)| \leqslant (|f'(0)|+\varepsilon)^n M|x| \tag{6.1}$$

2° 如果有 $\delta>0$,使在 $x=0$ 的某领域,有

$$|f(x)-f'(0)x| \leqslant A|x|^{1+\delta} \tag{6.2}$$

则有 $[a,b]$ 上的连续函数 M(x),M(0)=1,和数 k,使得

$$|f^n(x)-(f'(0))^n M(x)x| \leqslant K|f'(0)|^{n(1+\delta)}|x|^{1+\delta} \tag{6.3}$$

3° 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 $p+2$ 阶导数,且

$$f^{(j)}(0)=0 \qquad (1<j\leqslant p) \tag{6.4}$$

则(6.3)可精确化为 $\left(c=f'(0),\ l=\dfrac{1}{p+1}f^{(p+1)}(0)\right)$

$$f^n(x) = c^n M(x)x\cdot\exp\left\{-l(M(x)x)^p\frac{c^{np}}{1-C^p}+O(|c^n x|^{p+1})^*\right\} \tag{6.5}$$

* O 记号用法如通常分析教程所规定. 即 $O(|c^n x|^{p+1})=|c^n x|^{p+1}O(1)$,这里 $O(1)$ 是有界量,它的上下界仅与 f 有关而与 n,x 无关. 以下的 O 记号按此规定.

4°　在 2°或 3°条件之下，分别有数 K_1、K_2 使

$$|f^n(x) - c^n x| < K_1 |c|^n |x|^{1+\delta} \tag{6.6}$$

或

$$\left| f^n(x) - c^n\left(x + \frac{l(1 - c^{np})x^{p+1}}{1 - c^p}\right) \right| \leqslant K_2 |c|^n |x|^{p+2} \tag{6.7}$$

证明　1°　由条件及定理 5.4 的情形 1，对$[a,b]$上的一切 x，有$\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)=0$. 我们断言，$f^n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于零.

首先，由$|f'(0)|<1$，对 $\varepsilon>0$，必有 $x=0$ 的某邻域 Δ，使对一切 $x\in\Delta$，有 $f(x)\in\Delta$，且 $|f(x)|\leqslant(|f'(0)|+\varepsilon)|x|$. 不妨设 $|f'(0)|+\varepsilon<1$，于是对一切 $x\in\Delta$，有

$$|f^n(x)| \leqslant (|f'(0)| + \varepsilon)^n |x| \tag{6.8}$$

这说明，在 Δ 上，$f^n(x)$一致收敛于零.

若 $f^n(x)$不在$[a,b]$上一致收敛于零，则必有$[a,b]$上的点列$\{x_j\}$及自然数列$\{n_j\}$，和某个 $\varepsilon>0$，满足

$$\begin{cases} x_j \to \bar{x} \quad (j \to +\infty) \\ n_j \to +\infty \quad (j \to +\infty) \\ |f^{n_j}(x_j)| > \varepsilon \end{cases} \tag{6.9}$$

但由于 $f^n(\bar{x})\to 0$，故有 n_0，使对 $n\geqslant n_0$ 有 $f^n(\bar{x})\in\Delta$，于是有 $\bar{x}$ 的邻域 Δ_1，满足 $f^{n_0}(\Delta_1)\subset\Delta$，从而对 $n\geqslant n_0$ 有 $f^{n_0}(\Delta_1)\subset\Delta$，由(6.8)，对 $x\in\Delta_1$，$f^n(x)$一致地趋于零，从而对足够大的 m，对一切 $x\in\Delta_1$，有 $|f^m(x)|<\varepsilon$，这与(6.9)矛盾. 所以在$[a,b]$上一致地有 $f^n(x)\to 0$.

因此，存在 $N>0$，使对一切 $x\in[a,b]$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $f^n(x)\in\Delta$. 从而由(6.8)，得

$$|f^n(x)| \leqslant (|f'(0)| + \varepsilon)^{n-N} |f^N(x)| \leqslant (|f'(0)| + \varepsilon)^{n-N} |\Delta| \tag{6.10}$$

这里，$|\Delta|$表 Δ 的直径. 令

$$d = \inf_{x \in \Delta}\{|x|, x \in [a,b]\}.$$

则 $d>0$，而且由(6.10)得，当 $x\in[a,b]$ 而 $x\notin\Delta$ 时

$$|f^n(x)| \leqslant \frac{(|f'(0)|+\varepsilon)^{n-N}}{|x|}\cdot|\Delta||x| \leqslant (|f'(0)|+\varepsilon)^{n-N}\cdot\frac{|\Delta|}{d}|x| \tag{6.11}$$

结合(6.11)和(6.8)，取 M 为 $(|f'(0)|+\varepsilon)^{-N}\cdot\dfrac{|\Delta|}{d}$，即得(6.1).

2° 设在 $x=0$ 的某邻域 Δ，有(6.2)式成立. 把 $f(x)$ 写成

$$f(x) = cx(1+r(x)) \quad (c=f'(0), r(0)=0) \tag{6.12}$$

则由(6.2)知，对某个 $B>A$，在 $[a,b]$ 上，有

$$|r(x)| < B|x|^\delta \tag{6.13}$$

再用已获证的(6.1)，得

$$|r(f^n(x))| < B|f^n(x)|^\delta \leqslant BM(|c|+\varepsilon)^n|x| \tag{6.14}$$

于是，无穷乘积

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+r(f^n(x))) \tag{6.15}$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛于一个连续函数，记之为 $M(x)$. 显然有 $M(0)=1$，这是由 $f(x)$、$r(x)$ 连续且 $r(0)=0$ 之故.

不难验证

$$f^n(x) = c^n x\prod_{k=0}^{n-1}(1+r(f^k(x))) \tag{6.16}$$

从而得知，有 $L>0$ 使对一切 n 和 $x\in[a,b]$，有

$$|f^n(x)| \leqslant L|c^n x| \tag{6.17}$$

这个估计式比(6.1)强. 进一步由(6.16)可得

$$f^n(x) = c^n x\prod_{k=0}^{\infty}(1+r(f^k(x))) + c^n x\prod_{k=0}^{n-1}(1+r(f^k(x)))$$

$$- c^n x\prod_{k=0}^{\infty}(1+r(f^k(x)))$$

$$= c^n x M(x) + c^n x \prod_{k=0}^{n-1}(1 + r(f^k(x)))\left[1 - \prod_{k=n}^{\infty}(1 + r(f^k(x)))\right]$$

$$= c^n x M(x) + f^n(x)\left(1 - \prod_{k=n}^{\infty}(1 + r(f^k(x))\right) \qquad (6.18)$$

现在我们来估计(6.18)右端最后一项中的括弧内式子的上界.当 n 足够大或 $|x|$ 足够小时,总有

$$\left|1 - \prod_{k=n}^{\infty}(1 + r(f^k(x))\right| \leqslant L_1 |r(f^n(x))|$$

$$\leqslant L_1 B L^\delta |x|^\delta |c|^{n\delta} \qquad (6.19)$$

这里,L_1 是某个正数,并用到(6.13)和(6.17).综合(6.19)和(6.18),可得

$$|f^n(x) - c^n x M(x)| \leqslant K |c|^{n(1+\delta)} |x|^{1+\delta} \qquad (6.20)$$

即(6.3).故 2°得证.

3° 由(6.18)可得,当 n 足够大或 $|x|$ 足够小时,有

$$f^n(x) = c^n x M(x)\left[\prod_{k=n}^{\infty}(1 + r(f^k(x)))\right]^{-1} \qquad (6.21)$$

由所设条件(6.4)可知

$$r(x) = l x^\nu + O(|x|^{\nu+1}) \qquad (6.22)$$

结合(6.20)可知

$$r(f^k(x)) = l c^{k\nu}(x M(x))^\nu + O_1(|c^k x|^{\nu+1}) \qquad (6.23)$$

因而有

$$(1 + r(f^k(x))) = \exp\{l c^{k\nu}(x M(x))^\nu + O_2(|c^k x|^{\nu+1})\} \qquad (6.24)$$

将(6.24)代入(6.21),并应用等比级数求和公式,即得 3°.

4° 由于 $M(x)$ 是一个未知函数,故我们希望对它有一个更确切的估计,而不以仅仅知道 $M(0)=1$ 为满足.

在 2°的条件下,用(6.19),取 $n=0$ 可得

$$|1 - M(x)| \leqslant L_1 B L^\delta |x|^\delta \qquad (6.25)$$

由此可得(参看(6.20))

$$|f^n(x) - c^n x| \leqslant K_1 |c|^n \cdot |x|^{1+\delta} \tag{6.26}$$

此即(6.6).

在 3°的条件之下，利用 $f^n(x)$的表达式(6.16)和(6.24)，(6.25)可得

$$\begin{aligned} f^n(x) &= c^n x \prod_{k=0}^{n-1} (1 + r(f^k(x))) \\ &= c^n x \prod_{k=0}^{n-1} \exp\{l c^{kp} x^p + O_5(|c^{kp} x^{p+1}|)\} \\ &= c^n x \exp\left\{\frac{l x^p(1 - c^{np})}{1 - c^p} + O_6(|x|^{p+1})\right\} \\ &= c^n x\left(1 + \frac{l x^p(1 - c^{np})}{1 - c^p} + O_7(|x|^{p+1})\right) \end{aligned} \tag{6.27}$$

由此得

$$\left|f^n(x) - c^n\left(x + \frac{l(1 - c^{np})x^{p+1}}{1 - c^p}\right)\right| \leqslant K_2 |c|^n |x|^{p+2} \tag{6.28}$$

证毕.

在定理 6.1 的诸结论中，有一些常数. 这些常数是可以根据$[a,b]$的大小和 $f(x)$的性质具体地加以估计的. 这里不再细述了.

对于 $f'(0)=0$ 的情形，我们仅给出下列简单的估计.

定理 6.2　设 $f(x)$在$[0,b]$上连续，$0\leqslant f(x)\leqslant x$，且有唯一不动点 $x=0$，$f'(0)=0$，$f(x)$可表为

$$f(x) = a x^p (1 + r(x))$$

$$(a > 0, p > 1, |r(x)| \leqslant B x^\delta, \delta > 0) \tag{6.29}$$

则有$[0,b]$上的连续函数 $M(x)$，$M(0)=1$，使得

$$f^n(x) = a^{\frac{p^n-1}{p-1}} x^{p^n} (M(x) + R_n(x))^{p^{n-1}} \tag{6.30}$$

这里 $R_n(x) = O\left(\dfrac{|f^n(x)|^\delta}{p^n}\right)$

证明　对 $x\in[0,b]$，显然 $f^n(x)$ 一致收敛于零. 不难验证

$$f^n(x)=a^{\frac{p^n-1}{p-1}}x^{p^n}\prod_{k=0}^{n-1}(1+r(f^k(x)))^{p^{n-1-k}}$$

$$=a^{\frac{p^n-1}{p-1}}x^{p^n}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+r(f^k(x)))^{p^{-k}}\right)^{p^{n-1}}\tag{6.31}$$

考虑无穷乘积

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+r(f^k(x)))^{p^{-k}}\tag{6.32}$$

由于 $r(x)$ 有界，且由 $r(x)\to0$（当 $x\to0$）知，$r(f^k(x))$ 当 $k\to+\infty$ 时，一致收敛于零，故当 k 足够大时

$$\left|(1+r(f^k(x)))^{p^{-k}}-1\right|\leqslant\frac{L}{p^k}\tag{6.33}$$

这里 L 是与 x,k 无关的某个正数. 由 $p>1$ 知无穷乘积(6.32)一致收敛于连续函数，记之为 $M(x)$，显然 $M(0)=1$. 对(6.32)的余项作平凡的估计，可得(6.30)及其中 $R_n(x)$ 的估计. 证毕.

至于 $|f'(0)|=1$ 的情形，则可归结为 $f'(0)=1$ 的情形. 这时，我们有

定理 6.3　设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续，在 $[0,b]$ 上为正，有唯一不动点 $x=0$，且 $f'(0)=1$. 则

1°　如果

$$f(x)=x-\lambda x^{1+p}+r(x)$$

$$\left(p>0,\lambda>0,\frac{r(x)}{x^{1+p}}\to0\quad(\text{当 }x\to0)\right)\tag{6.34}$$

则有

$$f^n(x)=\frac{x}{\sqrt[p]{1+n\lambda px^p}}(1+R_n(x))\tag{6.35}$$

这里 $R_n(x)$ 当 $n\to+\infty$ 时，关于 x 一致地趋于零，并且当 $x\to0$ 时，关于 n 一致地趋于零.

2° 如果在(6.34)中

$$r(x) = Ax^{1+p+q} + \alpha(x)$$

$$(q > 0, x^{(1+p+q)}\alpha(x) \to 0 \quad (当\ x \to 0)) \tag{6.36}$$

则当 $q>p$ 时

$$f^n(x) = x\left\{1 + n\lambda p x^p + \left[\frac{\lambda(p+1)}{2}\ln(1+n\lambda p x^p)\right]x^p + x^p\widetilde{M}(x) + O\left(\left(\frac{x^p}{1+n\lambda p x^p}\right)^{\delta}\right)x^p\right\}^{-\frac{1}{p}} \tag{6.37}$$

这里 $\widetilde{M}(x)$ 是连续函数，$\widetilde{M}(0)=0$，而 δ 是大于 0 而小于 $\min\{1, \frac{q}{p}-1\}$ 的任意正数.

当 $q=p$，且 $\alpha(x)=O(x^{1+2p+\varepsilon})(\varepsilon>0)$ 时，有

$$f^n(x) = x\left(1 + n\lambda p x^p + \left(\frac{\lambda(p+1)}{2} - \frac{A}{\lambda}\right)x^p\ln(1+n\lambda p x^p) + x^p\widetilde{M}(x) + O\left(\left(\frac{x^p}{1+n\lambda p x^p}\right)^{\delta}\right)x^p\right)^{-\frac{1}{p}} \tag{6.38}$$

这里 δ 是小于 $\min\{1, \frac{\varepsilon}{p}\}$ 的任意正数.

当 $\frac{p}{2}<q<p$，且 $\alpha(x)=O(x^{1+2p+\varepsilon})$ 时，有

$$f^n(x) = x\left(1 + n\lambda p x^p + \frac{Ap^2x^p}{p-q}\left(x^{q-p} - (x^{-p} + n\lambda p)^{1-\frac{q}{p}}\right) + \frac{\lambda(p+1)x^p}{2}\ln(1+n\lambda p x^p) + x^p\widetilde{M}(x) + O\left(\frac{x^p}{1+n\lambda p x^p}\right)^{\delta}\right)^{-\frac{1}{p}} \tag{6.39}$$

这里 δ 是小于 $\min\{\frac{2q}{p}-1, \frac{\varepsilon}{p}\}$ 的任意正数.

证明 显然，$f^n(x)$ 当 $n\to+\infty$ 时，关于 x 一致地趋于零. 令

$g(0)=0$，且对 $x\neq 0$，令

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \left(f\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{p} = \left(x^{\frac{1}{p}} - \lambda x^{1+\frac{1}{p}} + r\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{p} \\
&= x\left(1 - \lambda x + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}} r\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right)^{p} \\
&= x(1 - \lambda x + s(x))^{p} \\
&= x(1 - \lambda p x + u(x)) \\
&= \frac{x}{1 + \lambda p x + v(x)}
\end{aligned}
\tag{6.40}
$$

则 $g(x)$ 在 $[0,b^{p}]$ 上连续，在 $(0,b^{p}]$ 上为正，有唯一不动点 $x=0$，且对 $x\neq 0$ 有 $g(x)<x$，即 $1+\lambda px+v(x)>1$. 由(6.40)及 $r(x)$ 之性质易知

$$
\lim_{x\to 0}\frac{v(x)}{x} = 0 \tag{6.41}
$$

再令

$$
G(x) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)} \quad (x \in [b^{-p}, +\infty)) \tag{6.42}
$$

则由(6.40)得

$$
\begin{aligned}
G(x) &= x\left(1 + \lambda p\cdot\frac{1}{x} + v\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= x + \lambda p + x v\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

易验证

$$
G^{n}(x) = x + n\lambda p + \sum_{k=0}^{n-1} G^{k}(x) v\left(\frac{1}{G^{k}(x)}\right) \tag{6.44}
$$

由(6.42)知 $g^{n}(x) = \left(G^{n}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$，用(6.44)，得

$$
\begin{aligned}
g^{n}(x) &= \left(\frac{1}{x} + n\lambda p + \sum_{k=0}^{n-1}(g^{k}(x))^{-1}\cdot v(g^{k}(x))\right)^{-1} \\
&= \frac{x}{1 + n\lambda p x + x\sum(n,x)}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{x}{1+n\lambda px}\left[1-\frac{x\sum(n,x)}{1+n\lambda bx+x\sum(n,x)}\right] \tag{6.45}$$

这里$\sum(n,x)=\sum_{k=0}^{n-1}(g^k(x))^{-1}\cdot v(g^k(x))$. 于是由(6.40)得

$$f^n(x)=\left\{\frac{x^p}{1+n\lambda px^p}\left[1-\frac{x^p\sum(n,x^p)}{1+n\lambda bx^p+x^p\sum(n,x^p)}\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt[p]{1+n\lambda px^p}}\left[1-\frac{x^p\sum(n,x^p)}{1+n\lambda bx^p+x^p\sum(n,x^p)}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{6.46}$$

由于当 $x\to 0$ 时,有 $x^{-1}v(x)\to 0$,故当 $n\to+\infty$时,有

$$\frac{1}{n}\sum(n,x^p)\to 0 \tag{6.47}$$

于是 1°得证.

2° 当 $q>p$ 时,按(6.40)易求出(用台劳展式)

$$v(x)=\frac{p(p+1)}{2}\lambda^2x^2+O(x^{2+\varepsilon}) \tag{6.48}$$

这里 $\varepsilon=\min\left\{\frac{q}{p}-1,1\right\}>0$.

于是可估计(6.44)中之和号:

$$\sum_{k=0}^{n-1}G^k(x)v\left(\frac{1}{G^k(x)}\right)=\frac{\lambda^2p(p+1)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{G^k(x)}+O\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(G^k(x))^{1+\varepsilon}}\right) \tag{6.49}$$

由已证之 1°中的(6.44)可知

$$G^n(x)=x+n(\lambda p+\alpha_n(x)) \tag{6.50}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{当 } n\to+\infty \text{ 时}, \alpha_n(x) \text{ 一致趋于 } 0,\\ x\to+\infty \text{ 时}, \alpha_n(x) \text{ 一致趋于 } 0\end{array}\right)$$

故知

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{G^k(x)}=O(\ln(x+n\lambda p)) \tag{6.51}$$

再把(6.51),(6.49)用于(6.44)得

$$G^n(x)=x+n\lambda p+O(\ln(x+n\lambda p))$$
$$=x+n\lambda p+\beta_n(x) \tag{6.52}$$

故有

$$\left|\frac{1}{G^k(x)}-\int_k^{k+1}\frac{dt}{x+t\lambda p}\right|=\left|\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{x+k\lambda p+\beta_k(x)}-\frac{1}{x+t\lambda p}\right)dt\right|$$
$$=\left|\int_k^{k+1}\frac{[(t-k)\lambda p-\beta_k(x)]dt}{(x+t\lambda p)(x+k\lambda p+\beta_k(x))}\right|\leqslant\frac{L\ln(x+k\lambda p)}{(x+k\lambda p)^2} \tag{6.53}$$

这里 $L>0$ 的某常数.

由(6.53)可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{G^k(x)}=\int_0^n\frac{dt}{x+t\lambda p}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{[(t-k)\lambda p-\beta_k(x)]dt}{(x+t\lambda p)(x+k\lambda p+\beta_k(x))}$$
$$=\frac{1}{\lambda p}\ln\frac{x+n\lambda p}{x}+M_1(x)+r_n(x) \tag{6.54}$$

这里 $M_1(x)$是$[b^{\frac{-1}{t}},+\infty)$上的连续函数,当 $x\to+\infty$时,$M_1(x)\to 0$. 而

$$r^n(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{(\beta_k(x)-(t-k)\lambda p)dt}{(x+t\lambda p)(x+k\lambda p+\beta_k(x))}=O((x+n\lambda p)^{-\sigma}) \tag{6.55}$$

这里 σ 是任一个小于 1 的正数.

类似的方法可得

$$O\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(G^k(x))^{1+\varepsilon}}\right)=M_2(x)+O((x+n\lambda p)^{-\sigma}) \tag{6.56}$$

从(6.56)、(6.55)、(6.54)及(6.49)得

$$\sum_{k=0}^{n-1}G^k(x)v\left(\frac{1}{G^k(x)}\right)=\frac{\lambda(p+1)}{2}\ln\frac{x+n\lambda p}{x}+M(x)+O((x+n\lambda p)^{-\sigma}) \tag{6.57}$$

这里 $M(x)=\frac{\lambda^2p(p+1)}{2}M_1(x)+M_2(x)$,$M(x)$连续,当 $x\to+\infty$时

$M(x)\to 0$，而取 δ 为小于 ε 的任一正数. 再把(6.57)代入(6.44)，作变换：

$$g^n(x) = \left(G^n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{x} + n\lambda p + \frac{\lambda(p+1)}{2}\ln(1+n\lambda px) + M\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\left(\frac{x}{1+n\lambda px}\right)^{\delta}\right)\right)^{-1}$$
$$= \frac{x}{1+n\lambda px + \frac{\lambda(p+1)x}{2}\ln(1+n\lambda px) + xM\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\left(\frac{x}{1+n\lambda px}\right)^{\delta}\right)x} \quad (6.58)$$

再应用 $f^n(x)=(g^n(x^p))^{\frac{1}{p}}$ 即得所欲证的(6.37).

若 $q=p$，则当 $\alpha(x)=O(x^{1+2p+\varepsilon})$时，在(6.40)中 $v(x)$之展开式为

$$v(x) = \left(\frac{p(p+1)\lambda^2}{2} - pA\right)x^2 + O(x^{2+\frac{\varepsilon}{p}}) + O(x^3) \quad (6.59)$$

用几乎相同的方法，可得(6.38).

若 $\frac{p}{2}<q<p$，当 $\alpha(x)=O(x^{1+2p+\varepsilon})$时，在(6.40)中 $v(x)$之展开式为

$$v(x) = -Apx^{1+\frac{q}{p}} + \frac{p(p+1)}{2}\lambda^2x^2 + O(x^{2+\sigma}) \quad (6.60)$$

这里 $\sigma = \min\left\{\frac{q}{p}, \frac{\varepsilon}{p}\right\}$.

在进一步估计(6.44)中之和号 $\sum_{k=0}^{n-1}G^k(x)v\left(\frac{1}{G^k(x)}\right)$ 时，必须处理对应于(6.60)中 $-Apx^{1+\frac{q}{p}}$ 这一项的和：

$$\sum_{k=0}^{n-1}(G^k(x))^{-\frac{q}{p}}. \quad (6.61)$$

注意到这时有 $G^k(x) = x + k\lambda p + O\left((x+k\lambda p)^{1-\frac{q}{p}}\right)$，故可利用

$$(G^k(x))^{-\frac{q}{p}} = \int_k^{k+1}(x+t\lambda p)^{-\frac{q}{p}}dt + \int_k^{k+1}\left[(G^k(x))^{-\frac{q}{p}} - (x+t\lambda p)^{-\frac{q}{p}}\right]dt \quad (6.62)$$

来估计它. 其结果为

$$\sum_{k=0}^{n-1}(G^k(x))^{-\frac{q}{p}}=\frac{p}{p-q}\left[(x+n\lambda p)^{1-\frac{q}{p}}-x^{1-\frac{q}{p}}\right]+M_1(x)+O\left((x+k\lambda p)^{1-\frac{2q}{p}}\right) \tag{6.63}$$

把(6.63)、(6.54)等代入(6.44)，变换后可得(6.39)．证毕．

至于其他情形，如 $q\leqslant\frac{p}{2}$ 时，由于过于繁复，这里就不再讨论了．

推论 6.4　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续．$f^2(x)$ 有唯一不动点 $x=0\in(a,b)$，$f[a,b]\subset[a,b]$，$f'(0)=-1$．且 $f(x)$ 可写成

$$f(x)=-x+\lambda x|x|^p+r(x)$$
$$\left(p>0,\lambda>0,\text{当 } x\to 0 \text{ 时}\frac{r(x)}{|x|^{1+p}}\to 0\right) \tag{6.64}$$

则有

$$f^n(x)=\frac{(-1)^n x}{\sqrt[p]{1+n\lambda p|x|^p}}(1+R_n(x)) \tag{6.65}$$

这里 $R_n(x)$ 当 $n\to+\infty$ 时关于 x 一致地趋于零，$x\to 0$ 时关于 n 一致地趋于零．

证明　令

$$F(x)=f^2(x)=x-2\lambda x|x|^p+r_1(x)\quad(x>0) \tag{6.66}$$

则对 $F(x)$ 可用定理 6.3 的 1°，得(当 $x>0$)

$$f^{2n}(x)=F^n(x)=\frac{x}{\sqrt[p]{1+n\lambda p|x|^p}}(1+\tilde{R}_n(x)) \tag{6.67}$$

注意到 $f(x)$ 可写成形式

$$f(x)=\frac{-x}{\sqrt[p]{1+\lambda p|x|^p+\bar{r}(x)}} \tag{6.68}$$

这里 $\bar{r}(x)$ 是连续函数，满足

$$\frac{\bar{r}(x)}{|x|^p}\to 0\quad(\text{当 } x\to 0) \tag{6.69}$$

把(6.67)中的 x 换成(6.68)中的 $f(x)$，整理之，即得(6.65)之形式

$$f^{2n+1}(x)=\frac{-x}{\sqrt[r]{1+(2n+1)\lambda p|x|^r}}(1+R_{2n+1}(x))\quad(6.70)$$

当 $x<0$ 时，取 $F_1(x)=-f^2(-x)$，对 F_1 用定理 6.3 之 1°，类似可证. 证毕.

关于 $f'(0)=-1$ 时，更细致的情形，就不再讨论了.

若 $f^n(x)\to+\infty$，令 $F(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$，则 $F^n(x)=\left(f^n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$，$F^n(x)\to 0$. 这样，就可以利用前面的结果对 $f^n(x)$ 进行估计.

推论 6.5 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(x)>x$，且

$$f(x)=Ax+B(x)$$
$$(A>1,|B(x)|\leqslant Mx^{1-\varepsilon},\varepsilon>0)\quad(6.71)$$

则

$$f^n(x)=A^nxM(x)(1+R_n(x))\quad(6.72)$$

这里 $M(x)$ 连续，当 $x\to+\infty$ 时 $M(x)\to1$，而 $|R_n(x)|<KA^{-n\varepsilon}x^{-\varepsilon}$.

证明 令 $F(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}=\left(\frac{A}{x}+B\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$，这里 x 在 $(0,a^{-1}]$ 中变化. $F(x)$ 可写成

$$F(x)=\frac{x}{A}(1+r(x)),\left(r(x)=\frac{-xB\left(\frac{1}{x}\right)}{A+xB\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\quad(6.73)$$

于是，由 $|B(x)|\leqslant Mx^{1-\varepsilon}$ 得

$$|r(x)|\leqslant\widetilde{M}|x|\left(\frac{1}{|x|}\right)^{1-\varepsilon}=\widetilde{M}x^{\varepsilon}\quad(6.74)$$

因此 $F(x)$ 满足定理 6.1 之 2°中的条件，故得

$$F^n(x)=\frac{x}{A^n}\widetilde{M}(x)(1+\widetilde{R}_n(x)),$$

$$(|\tilde{R}_n(x)| < \tilde{K}A^{-pn}x^{\delta}) \tag{6.75}$$

再由 $f^n(x) = \left(F^n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$ 得(6.72). 证毕.

推论 6.6 设 $f(x)$在$[b,+\infty)$上连续,$f(x)>x$,且

$$f(x) = Ax^p(1 + r(x))$$

$$(A > 0, p > 1, |r(x)| < Bx^{-\delta}, \delta > 0) \tag{6.76}$$

则有$[b,+\infty)$上的连续函数 $M(x)$,$M(x)$当 $x\to+\infty$时趋于 1,使得

$$f^n(x) = A^{\frac{p^n-1}{p-1}}x^{p^n}\,(M(x) + R_n(x))^{p^{n-1}}$$

$$(R_n(x) = O(p^{-n}(f^n(x))^{-\delta})) \tag{6.77}$$

证明 令 $F(x) = \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$,则 $F(x)$ 满足定理 6.2 的条件,可按(6.30) 估计 $F^n(x)$,再用 $f^n(x) = \left(F^n\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}$ 的关系得到(6.77).

不用定理 6.2,也可仿定理 6.2 直接证明之. 证毕.

定理 6.7 设 $f(x)$在$[b,+\infty)$上连续,$f(x)>x$,且

$$f(x) = x + \lambda x^{1-p} + r(x) \quad (\lambda > 0, p > 0)$$

$$\left(\frac{r(x)}{x^{1-p}} \to 0 \quad (x \to +\infty)\right) \tag{6.78}$$

则

$$f^n(x) = (x^p + n\lambda p + R_n(x))^{\frac{1}{p}} \tag{6.79}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{当 } n \to +\infty \text{ 时,} \dfrac{R_n(x)}{n} \text{ 关于 } x \text{ 一致趋于零,} \\ \text{当 } x \to +\infty \text{ 时,} \dfrac{R_n(x)}{n} \text{ 关于 } n \text{ 一致趋于零.}\end{array}\right)$$

证明 令

$$\begin{aligned} g(x) &= (f(x^{\frac{1}{p}}))^p = x(1 + \lambda x^{-1} + x^{-\frac{1}{p}}r(x^{\frac{1}{p}}))^p \\ &= x(1 + \lambda p x^{-1} + R(x)) \\ &= x + \lambda p + xR(x) \end{aligned} \tag{6.80}$$

这里，当 $x \to +\infty$ 时，$xR(x) \to 0$. 于是

$$g^n(x) = x + n\lambda p + \sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) R(g^k(x))$$

$$\therefore f^n(x) = (g^n(x^r))^{\frac{1}{r}} = (x^r + n\lambda p + R_n(x))^{\frac{1}{r}}$$

证毕.

对定理 6.7 中的 $r(x)$ 的阶作各种假设，可以得到种种更细致的估计. 读者如有兴趣不妨做做.

附　　录

关于迭代根与嵌入流等问题的进一步的结果及文献.

对于函数迭代的研究，比较容易看到的较早的资料，是 E. Schröder（即本书第四节提到的谢留德）在 1871 年所发表的一篇文章[1]. 事实上，更早一些，N. H. Abel（阿贝尔）也研究过这类问题[2]. 另外据〔3〕所述，这一课题还可以追溯到 C. Babbage.

在〔1〕中，Schröder 系统地考察了这几个问题：

(i)　如何写出迭代函数 $f^n(x)$ 的较明显的分析表达式？

(ii)　迭代方程

$$\varphi^n(x) = f(x) \tag{1}$$

的解 $\varphi(x)$ 在什么条件下存在？如何去找 $\varphi(x)$？（后来，φ 被称为 f 的 n 阶迭代根.）

(iii)　怎样把迭代指数 n 推广到一般实数？

在同一篇文章里，Schröder 还提出了解决这几个问题的基本想法，即通过所谓 Schröder 方程

$$h(f(x)) = ch(x) \tag{2}$$

来研究 $f(x)$ 的迭代、迭代根及嵌入流问题. 关于方程(2)的具体作用，本书第四节作了介绍.

应用方程(2)研究 f 的迭代，需要 f 有一个不动点. 对于没有不动点的 f 的迭代，则可通过 Abel 方程

$$A(f(x)) = A(x) + 1 \tag{3}$$

来研究. 因当 A^{-1} 存在时，有 $f^n(x)=A^{-1}(A(x)+n)$.

最早提出用序列 $c^{-n}f^n(x)$ 来逼近(2)的解的，是 G. Konigs. 他在〔4〕中研究了当 f 解析时，(2)的解析解的存在问题与构造问题. 后来，U. T. Boedewadt 通过方程(3)，研究了(1)的多次可微解的存在性[5]. 但〔5〕中要假定 $f(x)$ 定义于开区间上，严格递增，而且没有不动点. 在这种条件下，〔5〕中证明了当 $f\in C^r$ 时 $(0\leqslant r\leqslant+\infty)$ (1)有 C^r 的解. 但对形如

$$\varphi(\varphi(x)) = e^x \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{4}$$

的函数方程，却不能肯定其解析解的存在. 这个问题被 H. Kneser 在 1950 年发表的文章〔6〕解决了. 在〔6〕中对方程(2)的可微解作了进一步的研究. 本书第四节中所介绍的构造(2)的解的方法，基本思路和〔6〕是一致的.

关于方程(1)的高维推广，S. Sternberg 在一系列的文章〔7〕、〔8〕、〔9〕中，对 $f(x)$ 定义于孤立不动点邻域的情形做了较全面的研究. 这里 $x\in R^n$ 而 f 是 R^n 中某开域上的自映射. 另外，微分动力系统理论中很有用的 Hartman 线性化定理，可以看成方程(2)在无穷维空间的推广(参看〔10〕). 至于不动点组成多维子流形的情形，也有人研究，如赵立人〔11〕.

不依赖于方程(2)或(3)，或不完全依赖于(2)或(3)，也可以研究迭代根和嵌入流的问题. 早在 1924 年，G. Hardy 在〔12〕中就提

出过直接构造严格递增连续函数的迭代根的方法，这就是本书第二节定理 2.3 所述的方法．对于非单调连续函数的迭代根的存在性的研究，长期以来没有进展．直到 1983 年，张景中、杨路在〔13〕中才获得了一般性的结果：对于 $f(x)$ 是区间上逐段严格单调而且连续的情形，〔13〕中给出了方程(1)对所有自然数 $n>1$ 有连续解的充要条件．且对不满足此条件的 f，给出了当且仅当 n 为奇数时，方程(1)有连续解的充要条件．同时证明：对其余的那些逐段严格单调的连续函数 f，(1)至多对有限个 n 有连续解．至于 f 是一般连续函数时，(1)何时才有连续解，迄今仍未获解决．对于 f 在闭区间上连续且在两个仅有的不动点处可微的情况，其在不动点处可微的迭代根一般不存在(见张伟年〔14〕)．

另一方面，嵌入流的问题，一直引起人们持续不断的兴趣．M. K. Fort 指出，这是一个颇为困难的问题〔15〕．若不考虑嵌入流的唯一性问题，则区间上连续严格单调函数嵌入连续流的问题可以认为早已解决．本书第三节的推论 3.5，实际上 Boedwadt 在 1944 年发表的文章〔5〕中已经知道了．但当涉及唯一性时，问题变得困难而且不确定了．近年来，LamPing-Fun 在这个方向发表了一系列的文章，例如〔16〕、〔17〕、〔18〕，这些文章中还附有另一些有关文献．

本书第四节仅介绍了不动点导数模大于零而小于 1 的 $f(x)$ 嵌入流的唯一性的初步结果．张景中、杨路在〔19〕中对嵌入流之唯一性问题给以新的、确定的提法，在这种确定的问题提法之下，对于十分广泛的情形(包括不动点导数为 ±1 及 0 的情形)获得了有关迭代根、嵌入流、可交换族等方面的唯一性准则．这个方法在〔20〕中被推广到了高维，但尚未对具体情形下的运用作进一步的工作．武河等在〔21〕中引入了多参数流的概念，对〔20〕中的结果作

了推广.球面上及平面上自同胚可嵌入连续流的条件,麦结华的文章〔22〕中获得了相当细致的结果.

区间上连续自映射什么时候可嵌入半流?这个问题显然比同胚嵌入流的问题复杂.杨路、张景中在〔23〕中彻底解决了这一问题:当且仅当连续自映射 f 满足两个条件:

(i) f 不减;

(ii) 若 $f(x_1)=f(x_2)$ 而 $x_1\neq x_2$ 时,必有 $f(f(x_1))=f(x_1)$,这时,f 可嵌入连续半流.这个答案出乎意外的简单.如果把半流的定义再减弱(参看本书第三节定义 3.1),去掉条件(i),则得到拟半流的定义.区间上连续自映射可嵌入拟半流的充要条件,已为杨路、张景中在〔24〕中得到.

关于迭代根及其有关的函数方程的研究,有兴趣的读者还可参看 M. Kuczma 等〔25〕、〔26〕、〔27〕、〔28〕,R. Isaacs〔29〕,A. Smajdor〔30〕,B. A. Rezniček〔31〕,J. Hadamard〔32〕,M. C. Zdun〔33〕,M. Roznowski〔34〕,赵立人〔35〕,蒋星耀〔36〕,张伟年〔37〕、〔38〕,司建国〔138〕等.张筑生〔39〕与麦结华〔40〕,解决了圆周上自同胚的嵌入流与迭代根问题.在文集〔41〕中,有关于迭代及有关方程的 20 多篇文献.

平面上的自映射的迭代问题与某些有趣的几何问题有关,如〔42〕.

习　　题*

1.1　设

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{1+2x_n}$$

(i)　当 $n\to+\infty$ 时，x_n 有没有极限？能否求出其极限？

(ii)　试写出通项 x_n 关于 x 和 n 的明显表达式.

1.2　已知 a,b,c,d 是实数，$ad-bc\neq0$. 在什么条件下能找到实的线性分式函数 $g(x)$，使

$$g(g(x))=\frac{ax+b}{cx+d}$$

1.3　一堆桃子．甲乙两组猴子都以为是自己的财产．甲组 4 个猴子，乙组 7 个猴子．甲组一个猴子来到时，把桃子均分成 4 分，剩两个，它吃了这两个，拿一份走了．乙组一个猴子来了，则把桃子均分成 7 分，剩一个，它吃了这一个，拿一份走了．这样 11 个猴子都来过之后．桃子至少还有多少？最初有多少？

1.4　求出下列函数的 n 阶迭代的表达式：

(i)　$f(x)=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2$；　　(ii)　$g(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$；

(iii)　$\varphi(x)=\dfrac{4x}{(1-x)^2}$.

2.5　试找寻连续函数 $h(x)$，使有

* 题号前冠以小节号码，便于参照正文考虑.

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - h(x)$$

2.6 求证：若 $f(x)$ 定义于 $[0,1]$ 上，$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，满足方程

$$f(f(x)) = x$$

则存在连续而且严格递增的函数 $h(x)$，满足

$$h(f(x)) = 1 - h(x)$$

2.7 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上严格递减的连续函数，$f(0)=1, f(1)=0$；求证：存在 $[0,1]$ 上的连续函数 $g(x)$，满足

$$g(g(g(x))) = f(x)$$

2.8 试构造一个逐段连续的函数 $\varphi(x)$，使它满足

$$\varphi[\varphi(x)] = -x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

2.9 求证：函数方程

$$g^n(x) = x^2 - 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

不存在连续的解.

3.10 设 $F(x)$ 是严格递增的连续函数，其定义域和值域均为 $[a,b]$. 试构造一列连续函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 使满足

(i) $f_1(f_1(x)) = F(x), f_n(f_n(x)) = f_{n-1}(x), (n \geqslant 2)$.

(ii) 在 $[a,b]$ 上一致地有

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = x$$

并进一步思考：如何利用 $\{f_n(x)\}$ 把 $F(x)$ 嵌入连续流.

3.11 求证：若 $F(x)$ 可嵌入 $[a,b]$ 上的连续流，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续而且严格递增.

3.12 求证：若 $F(x)$ 可嵌入 $[a,b]$ 上的连续半流，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续而且非减.

3.13 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续而且严格递减，$F(a)=b, F(b)=a$. 试证明：对任意正奇数 $2m+1$，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$，满

足

$$g^{2m+1}(x) = F(x)$$

3.14 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、逐段严格单调，在 (a,b) 内有 N 个极值点. 又知 $F(F(x))$ 在 (a,b) 内有 $N+r$ 个极值点，$r\geqslant 1$. 求证：对于 $n>N$，不存在满足 $f^n(x)=F(x)$ 的连续函数 $f(x)$.

4.15 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域连续. $f(0)=0$，$0<|f'(0)|<1$. 求证：谢留德函数方程

$$h(f(x))=ch(x) \qquad (c=f'(0))$$

有在 $x=0$ 处可微，且在 $x=0$ 处微商非零的解 $h(x)$ 的充要条件是下列无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+r(f^n(x))) \qquad \left(r(x)=\frac{f(x)}{cx}-1\right)$$

在 $x=0$ 某邻域一致收敛.

4.16 如果函数序列：

$$\Phi_n(x,y)=\frac{f^n(y)}{f^n(x)} \qquad (0<y\leqslant x\leqslant \delta, f \text{ 如 4.15 所设})$$

关于 x,y 一致地收敛于严格单调函数 $\Phi(x,y)$，则 $f(x)$ 可嵌入 $[0,\delta]$ 上的半流 $F^t(x)$，且 $(F^t(x))'|_{x=0}$ 存在.

4.17 试讨论下列两个方程的可微解的存在条件：

$$\text{(i)} \quad h(f(x)) = A(h(x))^{1+\varepsilon}(\varepsilon>0);$$

$$\text{(ii)} \quad h(f(x)) = \frac{h(x)}{1+bh(x)}$$

在(i)中 $f'(0)=0$，(ii)中 $f'(0)=1$. (i)、(ii)中均有 $f(0)=0$. 对 f 可加上足够强的可微条件. 思考这两个方程的用途.

5.18 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 求证：若对一切 $x\in[a,b]$ 极限

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x)$$

存在，则满足 $f(f(x))=x$ 的 $x=x_0$ 必满足 $f(x_0)=x_0$. 反之亦然. .

5.19 平面上有 n 个点 $\{A_k^0=(x_k,y_k)\}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1,n,A_n^0=A_0^0)$ 在线段 $A_k^0A_{k+1}^0$ 上取 A_k^1，使 $|A_k^0A_k^1|=\delta|A_k^0A_{k+1}^0|$，这里 $0<\delta<1$ 是给定了的. 又得 n 个点 $\{A_k^1\}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1,n,A_n^1=A_0^1)$. 归纳地定义 $\{A_k^m\}$：在线段 $A_k^lA_{k+1}^l$ 上取 A_k^{l+1}，使 $|A_k^lA_k^{l+1}|=\delta|A_k^lA_{k+1}^l|$，得 $\{A_k^{l+1}\}$ $(k=0,\cdots n,A_n^{l+1}=A_0^{l+1})$. 求证：当 $m\to+\infty$ 时，对每个 k，A_k^m 趋于 $\{A_0^0,A_1^0,\cdots,A_{n-1}^0\}$ 之重心 A.

5.20 设 $F(x,y)$ 有四阶连续偏微分. 若对任意多项式 $f(x)$，构造函数 $\varphi(x)=F(f(x),f'(x))$ 均能使 $\varphi^n(x)$ 在 f 的单根 x_0 的充分小邻域收敛于 x_0. 求证：$\varphi^n(x)$ 至多有二阶敛速.

5.21 试估计牛顿法在重根附近之敛速.

5.22 估计计算立方根的下列迭代程序之误差：(求 $\sqrt[3]{x}$)

$$y_{k+1}=y_k-\frac{y_k^2-\dfrac{x}{y_k}}{2y_k+\dfrac{x}{y_k^2}}\qquad(k=0,1,2,\cdots)$$

5.23 设 $x>0$，$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^x$，$\cdots$，$f_{n+1}(x)=x^{f_n(x)}$ 问 x 取何值时，$f_n(x)$ 当 $n\to+\infty$ 时有确定的极限.

5.24 求证：

1° 存在正数 $a>b>0$，使当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，有

$$\frac{x}{\sqrt{1+ax^2}}\leqslant\sin x\leqslant\frac{x}{\sqrt{1+bx^2}}$$

2° 讨论无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f^n(x)|^p\qquad(f(x)=\sin x)$$

之敛散性. 这里 $p\in(0,\infty)$

5.25 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域有二阶连续导数. $f(0)=0$, $0<|f'(0)|<1$, 试对 $(f^n(x))'$ 进行渐近估计.

5.26 设 $f(x)=x+3\ln x+\frac{1}{x}$, $(x>0)$. 试对 $f^n(x)$ 作渐近估计.

5.27 利用渐近估计式(6.77)及习题 4.17 研究下列问题：三个多项式 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, 其最高次项系数均为 1. 已知 $f(g(x))=g(f(x))$, $g(h(x))=h(g(x))$. 是否一定有 $f(h(x))=h(f(x))$?

第二章 周期轨与沙可夫斯基定理

在一个变化发展的系统中，若系统的某种状态会一再重现，则这种状态可称为系统的周期状态．在宇宙和自然界中，具有周期状态的系统大量存在．周期现象出现在天体运行，四季更迭，生物繁殖，机械振动等多种过程之中．迭代过程中的周期轨，是描述现实世界中周期现象的数学模型之一．它受到数学家和其他领域的科学家的重视，是理所当然的．

由于线段的拓扑特点，使线段自映射的周期轨的性质与一般流形上自映射的周期轨相比具有明显的特殊性．这特色集中地表现在沙可夫期基定理及有关的定理上，成为函数迭代的现代研究中最具吸引力的一个部分．本章将以尽可能浅近的方式，介绍这些引人入胜的事实．

§7 周期点

设 $f: M\to M$ 是集合到自身的映射．对任一个 $x\in M$，有正向轨道

$$O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^n(x), \cdots\} \qquad (7.1)$$

这个序列有什么性质，是研究迭代过程时所关心的主要问题之一．

在前面两节里，我们对 M 为区间的情形，研究了(7.1)趋于有穷或无穷的极限的情况. 现在我们转而研究另一种特殊情况：(7.1)具有周期性的情况. 这种情况包含有丰富的内容，极其有趣，引人入胜.

如果对某个 $x_0\in M$，有

$$f^n(x_0)=x_0(\text{但对一切 } 1\leqslant k<n, f^k(x_0)\neq x_0) \qquad (7.2)$$

我们称 x_0 是 f 的一个 n—周期点. 或者说 x_0 在 f 作用下有周期 n. 当 x 是 f 的 n—周期点时，(7.1)中显然只有 n 个不同的元素：$\{f^k(x), k=0,1,2,\cdots n\}$. 这时说(7.1)是 f 的 n-周期轨. 显然，若 x 是 f 的周期点，则对任意正整数 m，x 也是 $f^m(x)$ 的周期点.

当 $n=1$ 时，n-周期点就是不动点. 对于定义于区间上的实函数来说，函数图像和直线 $y=x$ 的交点的横坐标，就是不动点. 如果 $\{x_1,x_2\}$ 是 2-周期轨，则关于直线 $y=x$ 对称的两点 (x_1,x_2)、(x_2,x_1)，都在函数的图象上. 但当 $n\geqslant 3$ 时，n-周期点就不容易从几何图象上看出来了. 图 7.1 画出了定义于$[0,1]$上的一个连续函数 $\varphi(x)$ 的图象. 它有不动点 x_0，有 2-周期轨 $\{x_1,x_2\}$，还有 3-周期轨 $\{0,\frac{1}{2},1\}$，因为 $\varphi(0)=\frac{1}{2}$，$\varphi(\frac{1}{2})=1$，$\varphi(1)=0$. 此外，它还有没有别的周期轨呢？例如：有没有 7—周期轨？1986-周期轨？这就不容易看出来了. 下面我们将要指出：对任意正整数 n，图 7.1 所示的 $\varphi(x)$ 有 n-周期轨. 这是一个多少有点使人惊奇的结论.

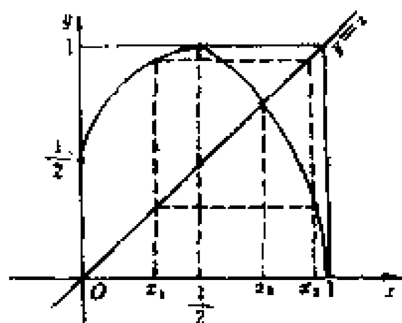


图 7.1

在证明这个有趣的结论之前，先来看几条平凡的命题：

定理 7.1　若 x_0 满足

$$f^k(x_0)=x_0 \qquad (7.3)$$

则 x_0 是 f 的周期点.如果 k 是 x_0 在 f 作用下的周期,则必有 $k|n$.

这里,$k|n$ 的意义是 k 能够整除 n.

证明 设 k 是使 $f^k(x_0)=x_0$ 的最小正整数,显然 $k\leqslant n$. 设 $n=kq+r$,这里 q 是正整数而 $0\leqslant r<k$,由 $f^k(x_0)=x_0$,可得 $f^{kq}(x_0)=x_0$,因而

$$f^n(x_0)=f^r(f^{kq}(x_0))=f^r(x_0) \tag{7.4}$$

由(7.3)及(7.4)得 $f^r(x_0)=x_0$. 由 k 的定义知 $r=0$. 证毕.

定理 7.2 设 x_0 是 f 的 p-周期点. 正整数 q 与 p 互素,(即 q 和 p 的最大公约数 $(p,q)=1$). $\varphi=f^q$,则 x_0 也是 φ 的 p-周期点.

证明 显然有 $\varphi^p(x_0)=f_{qp}(x_0)=x_0$,故 x_0 是 φ 的周期点,由定理 7.1,若 x_0 是 φ 的 n-周期点,则 $n|p$. 同时有

$$f^{nq}(x_0)=\varphi^n(x_0)=x \tag{7.5}$$

由定理 7.1 及(7.5)可知 $p|nq$,但 $(p,q)=1$,故 $p|n$. 可见只有 $p=n$. 证毕.

定理 7.3 设 x_0 是 f 的 p-周期点,$\varphi=f^q$,$(p,q)=d$,则 x_0 是 φ 的 m-周期点,这里 $m=\frac{p}{d}$.

证明 设 $p=dp_1$,$q=dq_1$,则 p_1 与 q_1 互素. 显然有

$$\varphi^{p_1}(x_0)=f^{qp_1}(x_0)=f^{dq_1p_1}(x_0)=x_0 \tag{7.6}$$

故知 x_0 为 φ 的 m-周期点,且有 $m|p_1$. 又因

$$f^{mq}(x_0)=\varphi^m(x_0)=x_0 \tag{7.7}$$

由定理 7.1 又有 $p|mq$,即 $dp_1|mdq_1$,因而 $p_1|mq_1$. 但 p_1 与 q_1 互素,故 $p_1|m$,即 $m=p_1=\frac{p}{d}$. 证毕。

反过来,若 x_0 是 f^q 的 m-周期点,x_0 又是 f 的什么样周期点呢?

定理 7.4 设 x_0 既是 f^q 的 m-周期点. 又是 f 的 n-周期点,如

果$(n,q)=d$，则 $n=dm$.

证明 因 x_0 是 f^q 的 m-周期点，令 $\varphi=f^q$，则

$$f^{mq}(x_0) = \varphi^m(x_0) = x_0 \tag{7.8}$$

但 x_0 是 f 的 n—周期点，则定理 7.1 可知 $n|mq$. 设 $n=n_1d, q=q_1d$，则$(n_1,q_1)=1$. 由 $n=n_1d|mq_1d$，故 $n_1|mq_1$. 但 n_1 和 q_1 互素，故 $n_1|m$.

另一方面有

$$\varphi^{n_1}(x_0) = f^{n_1q}(x_0) = f^{n_1q_1d}(x_0) = f^{q_1n}(x_0) = x_0 \tag{7.9}$$

又由于 x_0 是 φ 的 m—周期点，故 $m|n_1$. 于是 $m=n_1$，但有 $n=n_1d$，故 $n=dm$. 证毕.

定理 7.4 的一些简单推论，对我们研究周期点的出现规律是很有用的：

推论 7.1 若 x_0 是 f^{2^k} 的 m-周期点，且又是 f 的 n-周期点. 如果 $2^k|n$，则 $n=2^km$；又若 m 为偶数，亦必有 $n=2^km$.

推论 7.2 若 x_0 是 f^{2^k}的 2^l-周期点，且又是 f 的 n-周期点，若 $l\neq0$，则 $n=2^{k+l}$.

上面的讨论，不涉及实数及连续性. 为了得到更深刻的结果，我们进一步设 f 是定义在实数集 M 且在 M 中取值的函数. 为了叙述起来简便，引入一个记号：如果 Δ_1 和 Δ_2 是两个闭区间，当

$$[\min_{x\in\Delta_1} f(x), \max_{x\in\Delta_1} f(x)] \supset \Delta_2 \tag{7.10}$$

时，便记作 $\Delta_1 \xrightarrow{f} \Delta_2$，叫做"$\Delta_1$ 在 f 之下覆盖了 Δ_2". 若 $\Delta_1 \xrightarrow{f} \Delta_1$，记作 $\Delta_1 \overset{f}{\supset}$ 或 $\overset{f}{\subset}\Delta_1$. 在不至于混淆时，也可以省去记号 f 而记作 $\Delta_1\rightarrow\Delta_2$、$\Delta_1\supset$等.

下面的几条引理也是平凡的：在引理 7.1 至 7.4 中，均设 f 是定义于线段 I 上的连续映射，I 可以是开区间、闭区间、半开半闭的或无穷的.

引理 7.1　设$[a,b]\subset I$，$[a,b]\overset{f}{\supset}$，则有$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=x_0$.

证明　由$[a,b]\supset$可知，有$x_1\in[a,b]$，$x_2\in[a,b]$，使$f(x_1)\leqslant a\leqslant x_1$，$f(x_2)\geqslant b\geqslant x_2$，即$f(x)-x$在$x_1,x_2$两点处符号不同. 由介值定理，有$x_0\in[x_1;x_2]$使$f(x_0)-x_0=0$. 证毕.

这里，记号$[x;y]$表示以x,y为端点的闭区间.

引理 7.2　设$[a,b]$，$[c,d]$是I的子区间，$[a,b]\xrightarrow{f}[c,d]$，则有闭区间$\Delta\subset[a,b]$，使$f(\Delta)=[c,d]$，且$\Delta$的任一个真子区间无此性质.

证明　令$U=\{x|x\in[a,b],f(x)=d\}$，$V=\{x|x\in[a,b],f(x)=c\}$，在U中取一点u，V中取一点v，不妨设$u>v$. 令

$$U_1=U\cap[v,b],\quad V_1=V\cap[a,u]$$

取u^*为U_1中之最小者，则$[v,u^*]$即为所要之Δ.（理由请读者补足.）证毕.

引理 7.3　若有I的一串闭子区间$\Delta_0,\Delta_1\cdots\Delta_{n-1}$，使有

$$\Delta_0\xrightarrow{f}\Delta_1\xrightarrow{f}\Delta_2\xrightarrow{f}\cdots\xrightarrow{f}\Delta_{n-1}\xrightarrow{f}\Delta_0\tag{7.11}$$

则有$x_0\in\Delta_0$，使$f^n(x_0)=x_0$，且对$k=0,1,2\cdots,n-1$，有$f^k(x_0)\in\Delta_k$.

证明　根据引理 7.2 和$\Delta_{n-1}\xrightarrow{f}\Delta_0$，可知有$\Delta_{n-1}$的闭子区间$\Delta_{n-1}^*$，使$f(\Delta_{n-1}^*)=\Delta_0$. 然后由$\Delta_{n-2}\xrightarrow{f}\Delta_{n-1}\supset\Delta_{n-1}^*$，又有$\Delta_{n-2}$的闭子区间$\Delta_{n-2}^*$，使$f(\Delta_{n-2}^*)=\Delta_{n-1}^*$. 依此前推，可知有闭区间$\Delta_k^*\subset\Delta_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$使

$$\begin{cases}f(\Delta_k^*)=\Delta_{k+1}^*\subset\Delta_{k+1}\quad(k=0,1,\cdots,n-2)\\ f(\Delta_{n-1}^*)=\Delta_0\supset\Delta_0^*\end{cases}\tag{7.19}$$

由此可见$f^n(\Delta_0^*)\supset\Delta_0^*$，由引理 7.1，有$x_0\in\Delta_0^*\subset\Delta_0$，使$f^n(x_0)=x_0$
又由(7.11)可知，$f^k(x_0)\in\Delta_k^*\subset\Delta_k$，$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

现在，我们可以得到一个有趣的非平凡的结果了：

定理 7.5 设 $f(x)$是线段 I 上的连续自映射. 若 f 有 3-周期点,则对一切正整数 n,f 有 n-周期点.

证明 设 $x_0<x_1<x_2$ 是 f 的一个 3-周期轨,则 $f(x_1)=x_0$ 或 $f(x_1)=x_2$ 必有一成立. 不失一般性,不妨设 $f(x_1)=x_0$,则必有 $f(x_0)=x_2$,$f(x_2)=x_1$. 记 $\tilde{\Delta}_0=[x_0,x_1]$,$\tilde{\Delta}_1=[x_1,x_2]$,则

$$\subset \tilde{\Delta}_0 \leftrightarrows \tilde{\Delta}_1 \tag{7.13}$$

在引理 7.3 中取

$$\begin{cases} \Delta_0=\Delta_1=\cdots\cdots=\Delta_{n-2}=\tilde{\Delta}_0 \\ \Delta_{n-1}=\tilde{\Delta}_1 \end{cases} \tag{7.14}$$

则条件(7.11)被满足. 因而有 $x_0^*\in\Delta_0$,满足 $f^n(x_0^*)=x_0^*$,且

$$\begin{cases} f^k(x_0^*)\in\tilde{\Delta}_0(k=0,1,2,\cdots,n-2) \\ f^{n-1}(x_0^*)\in\tilde{\Delta}_1 \end{cases} \tag{7.15}$$

我们断言,x_0^*,$f(x_0^*)$,$\cdots$,$f^{n-1}(x_0^*)$两两不同. 若不然,x_0^* 的周期小于 n,即 $f^{n-1}(x_0^*)$是 x_0^*,$f(x_0^*)$,$\cdots$,$f^{n-2}(x_0^*)$中之一,因而

$$f^{n-1}(x_0^*)\in\tilde{\Delta}_0 \tag{7.16}$$

由(7.15)与(7.16)可知,$f^{n-1}(x_0^*)\in\tilde{\Delta}_0\cap\tilde{\Delta}=\{x_1\}$. 故

$$x_0^*=f^n(x_0^*)=f(f^{n-1}(x_0^*))=f(x_1)=x_2\notin\tilde{\Delta}_0$$

此与(7.15)中 $x_0^*\in\tilde{\Delta}_0$ 矛盾. 证毕.

由此定理可知,图 7.1 所示的函数 $\varphi(x)$有周期为任意正整数的周期点.

我们还可以把定理 7.5 推广为:

定理 7.6 若 f 是线段 I 上的连续自映射. I 的闭子区间 $\tilde{\Delta}_1$ 和 $\tilde{\Delta}_2$ 无公共内点,且有

$$\subset \tilde{\Delta}_1 \leftrightarrows \tilde{\Delta}_2 \tag{7.17}$$

则对任意的正整数 n,f 有 n-周期点,

证明 只要证明 f 有 3-周期点就够了. 在引理 7.3 中取 $n=$

3， $\Delta_0=\Delta_1=\tilde{\Delta}_1$， $\Delta_2=\tilde{\Delta}_2$，则有 $x_0\in\Delta_0=\tilde{\Delta}_1$，使

$$f^3(x_0)=x_0$$

若 x_0 不是 f 的不动点，则必为3-周期点. 设 x_0 是 f 的不动点，则必为 $\tilde{\Delta}_1$ 与 $\tilde{\Delta}_2$ 的公共点. 不妨设 $\tilde{\Delta}_1=[a,x_0]$，$\tilde{\Delta}_2=[x_0,b]$，由(7.17)可知，$\tilde{\Delta}_1$ 有两点 u,v 使 $f(u)=a$，$f(v)=b$，则

$$\subset[u;v]\leftrightarrows\tilde{\Delta}_2 \tag{7.18}$$

且$[u;v]$与$[x_0,b]$无公共点. 对(7.18)用引理 7.3，得 $x_0^*\in[u;v]$使 $f^3(x_0^*)=x_0^*$，x_0^* 显然不是不动点，证毕.

若 f 有 4—周期点，就得不到那么丰富的结论了. 只有

定理 7.7 设 f 是线段 I 上的连续自映射. 如果 f 有 4-周期点，则 f 必有 2—周期点.

证明 设 $x_1<x_2<x_3<x_4$ 是 f 的 4-周期点. 则 $f(x_2)$和 $f(x_3)$中至少有一个是 x_1 或 x_4. 否则，x_2，x_3 就是 f 的 2-周期点了. 不失一般性，设 $f(x_2)$，$f(x_3)$中有一个为 x_1. 分两种情形：

(i) $f(x_2)=x_1$，此时 $f(x_1)=x_3$ 或 x_4. 若 $f(x_1)=x_3$ 则 $f(x_3)=x_4$，就有

$$\subset[x_1,x_2]\leftrightarrows[x_2,x_3] \tag{7.19}$$

若 $f(x_1)=x_4$，则 $f(x_4)=x_3$，$f(x_3)=x_2$，于是也得(7.19). 由定理 7.6，对一切正整数 n，f 有 n-周期点，自然也就有 2-周期点.

(ii)若 $f(x_3)=x_1$，也有两种可能：

若 $f(x_1)=x_2$，则 $f(x_2)=x_4$，$f(x_4)=x_3$，得

$$[x_1,x_2]\leftrightarrows[x_3,x_4] \tag{7.20}$$

若 $f(x_1)=x_4$，则 $f(x_4)=x_2$，$f(x_2)=x_3$，也得(7.20). 用引理 7.3 可知，有 $x^*\in[x_1,x_2]$，使 $f^2(x^*)=x^*$ 且 $f(x^*)\in[x_3,x_4]$. 可见 x^* 是 f 的 2—周期点. 证毕.

定理 7.7 也可以推广到更为一般的形式：

定理 7.8　设 f 是线段 I 上的连续自映射. 若对某正整数 n，f 有 2^n-周期点，则 f 必有 2^{n-1}-周期点.

证明　$n=1$，定理是说：若 f 有 2-周期点，则必有不动点，这是显然的. $n=2$ 时，即定理 7.7

设 $n>2$，考虑 $\varphi(x)=f^{2^{n-2}}(x)$. 设 x_0 是 f 的一个 2^n-周期点. 由定理 7.3，x_0 是 $\varphi(x)$的 4-周期点，再由定理 7.7，$\varphi(x)$有 2-周期点 x^*. 由定理 7.4 的推论 7.2 可知，x^* 是 f 的 2^{n-1}-周期点. 证毕.

由此显然可知，若 f 有 2^n-周期点，则对一切 $0\leqslant l<n$，f 必有 2^l—周期点.

§8　沙可夫斯基定理

上一节所证明的定理 7.5，告诉我们一个有趣的事实：线段 I 上的连续自映射 f，如果有 3-周期点，则它有一切的 n-周期点. 这个定理 1975 年在《美国数学月刊》发表时，引起了很大的兴趣. 但不久就发现，早在 1964 年，一位名不见经传的苏联数学家沙可夫斯基(A. N. Sarkovskii)，就发表过比定理 7.5 更为广泛，也更为有趣的结果. 即现在众所周知的沙可夫斯基定理.

数学家对一元连续函数的研究，少说也有两三百年了吧. 光顾这个领域的数学大师，可说是接踵而至. 他们的光辉业绩，许多已成为大学一、二年级的课程，甚至要下放到高中了. 谁能想到，在这块被高手巨匠反复耕耘过的田园里，竟还有未被开垦的处女地，竟还能生长出前辈泰斗们未曾见到过的奇花异草呢？近几年引起人们广泛兴趣的沙可夫斯基定理，恐怕要算是这样一朵奇花吧！它揭

示出一串美妙而又出人意料的奥秘，而其证明的基础，又是平凡而初等的．上一节里的引理 7.3，就提供了沙可夫斯基定理所需要的全部分析知识．

我们知道，自然数的自然顺序是由小到大：1，2，3，4，5，……

沙可夫斯基把自然数重新排了个顺序．这种新的顺序不妨叫做 S 序．按照 S 序，如果 m 在 n 之前，便记作 $m\lhd n$．

在 S 序之下，头一个自然数不是 1 而是 3．3 之后是 5，然后是 7，9，11，13，……．即先把所有大于 1 的奇数由小到大地排出来；然后由小到大地排出所有奇数的 2 倍；再由小到大地排出它们的 4 倍、8 倍、16 倍、……．最后只剩下 2 的方幂了．这次变个花样，由大到小地排．压尾的几个是 16、8、4、2、1．

总之，按 S 序排出全体正整数，就是

$$3\lhd 5\lhd 7\cdots\lhd 2n+1\lhd 2n+3\lhd\cdots\cdots$$
$$\lhd 2\times 3\lhd 2\times 5\lhd 2\times 7\lhd\cdots\lhd 2\times(2n+1)\lhd 2\times(2n+3)\lhd\cdots\cdots$$
$$\lhd 2^2\times 3\lhd 2^2\times 5\lhd 2^2\times 7\lhd\cdots 2^2\times(2n+1)\lhd 2^2\times(2n+3)\lhd\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\lhd 2^m\times 3\lhd 2^m\times 5\lhd\cdots\lhd 2^m\times(2n+1)\lhd\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\lhd 2^l\lhd 2^{l-1}\lhd\cdots\lhd 16\lhd 8\lhd 4\lhd 2\lhd 1$$

自然要问，排这样的古怪顺序干什么呢？请看：

定理 8.1　（沙可夫斯基定理）设 $f(x)$ 是线段 I 上的连续自映射．f 有 m-周期点．则当 $m\lhd n$ 时，f 有 n-周期点．

容易看出，在这个定理中取 $m=3$ 的特款，便得到定理 7.5，取 $m=2^n$ 的特款，便得到定理 7.8，这就是说，我们已经熟悉了定理 8.1 的两种特殊情形．本节就来给出整个定理的证明．

先给出下面的引理．它本身也是十分有趣的

引理 8.1　设 $f(x)$ 是线段 I 上的连续自映射．f 有 $(2n-1)$-周期轨 $\{x_k=f^k(x_0),k=0,1,2,\cdots,2n\}$．又对于 $1\leqslant m<n$，f 没有 $(2m+$

1)-周期轨. 则若令 x_0 是诸 x_k 中由小到大排列时正中间的一个(即第 $n+1$ 个). 下列两种情形必居其一:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & x_{2n}<x_{2n-2}<\cdots<x_2<x_0<x_1<x_3<\cdots<x_{2n-1} \\ \text{(ii)} & x_{2n-1}<\cdots<x_3<x_1<x_0<x_2<x_4<\cdots<x_{2n}\end{array}\right\}\quad(8.1)$$

证明 为叙述方便,设诸 x_k 由小到大为 $z_1<z_2<\cdots<z_{2n+1}$. 并记 $O_f=\{z_1,z_2,\cdots z_{2n+1}\}$. 再引入记号

$$U_{kl}=\{z_i|k\leqslant i\leqslant l\}\tag{8.2}$$

如果

$$\max\{f(z)|z\in U_{kl}\}=z_j,\min\{f(z)|z\in U_{kl}\}=z_i\tag{8.3}$$

便记作

$$f^*(U_{kl})=U_{ij}\tag{8.4}$$

如果 $f^*(U_{kl})\supset U_{st}$,则记作

$$U_{kl}\Rightarrow U_{st}\tag{8.5}$$

此外,记 $\Delta_k=U_{k,k+1}(k=1,2,\cdots 2n)$.

在这些记号之下,我们先证明一个

断言 存在两个不大于 $2n$ 的正整数 m、l 及一串 $U_i=U_{k_il_i}(i=1,2,\cdots s,s=2n)$,其中 $U_1=\triangle_m,U_s=\triangle_l,U_{i+1}$中恰有一个元素不在 U_i 之中,且

$$\triangle_m\Rightarrow U_1\Rightarrow U_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow U_s\Rightarrow\triangle_m\tag{8.6}$$

$$U_1\subset U_2\subset\cdots\subset U_{s-1}\not\supset U_s\tag{8.7}$$

断言的证明 因 $f(z_1)>z_1,f(z_{2n+1})<z_{2n+1}$,故必有 $m\leqslant 2n$,使 $f(z_m)>z_m,f(z_{m+1})<z_{m+1}$,取 $U_1=\triangle_m,f^*(U_1)=U_2,f^*(U_2)=U_3$, $\cdots,f^*(U_{s-2})=U_{s-1}$. 用数学归纳,由 $U_1\subset U_2$ 知 $U_i\subset U_{i+1}$,$(1\leqslant i<s-1)$. 又当 $U_{s-2}\neq U_{1,2n+1}$时,显然 $U_i\not\supset U_{i+1}$. 显然,除了 U_s 尚未确定之外,(8.6)与(8.7)均成立.

因 $U_{1,m}$和 $U_{m,2n+1}$中的点不一样多,故必有 $l\neq m$,使 $f(z_l)$和

$f(z_{l+1})$在$\triangle_m$之两侧. 即有$\triangle_l \Rightarrow \triangle_m$. 即取$U_s=\triangle_l$.

如何确定数目s呢? 在$U_1,U_2,\cdots$这一串一个比一个更大的集合中,使$U_i \Rightarrow \triangle_l$的最小集$U_i$就叫做$U_{s-1}$,这就确定了$s$. 因$U_{i+1} \supset U_i$,这样的$s$必存在. 记含$U_i$的最小闭区间为$V_i=[z_{k_i},z_{l_i}]$. 由(8.6)可知

$$\subset V_1 \to V_2 \to \cdots \to V_{s-1} \to V_s \to V_1 \tag{8.8}$$

我们指出必有$s=2n$. 首先,因$U_i \supsetneq U_{i+1}$,故$s \leqslant 2n$. 如果有$s<2n$,利用(8.8)来应用引理7.3可知,有$\tilde{x}_0 \in V_1$,使

$$f^{2n-1}(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0 \tag{8.9}$$

并且有:当$0 \leqslant i \leqslant 2n-1-s$时,$f^i(\tilde{x}_0) \in V_1$,当$2n-1-s<j<2n-1$时,$f^j(\tilde{x}_0) \in V_{j-2n+s+2}$. 这样,由于$V_s$与其他$V_i$无公共内点,$\tilde{x}_0$又不可能是$V_s$的端点,故在$\tilde{x}_0,f(\tilde{x}_0),f^2(\tilde{x}_0),\cdots,f^{2n-2}(\tilde{x}_0)$中,只有一个点属于$V_s$,可见$\tilde{x}_0$是$f$的$(2n-1)$-周期点. 此与假设矛盾. 故$s=2n$.

由此可知,U_{i+1}中恰有一个点不属于U_i. 断言得证.

为了完成引理8.1的证明,只要指出对$i=1,2,\cdots,2n-1$,f总是把V_i的一个端点A_i映为另一端点B_i,并又使A_i在B_i和$f(B_i)$之间就够了. 对i进行有限数学归纳:$i=1$时,显然. 若命题对$i \leqslant k<2n-1$为真,再证它对$i=k+1$亦真. 设$V_{k-1}=[A_k;B_k]$,由归纳假设易知,适当命名A_k、B_k时,有$f(A_k)=B_k$,并且必有$A_k \in [f(B_k);B_k]=V_k$,且$B_k \in [f(B_k);f^2(B_k)]=V_{k+1}$. 要证明的是$f(B_k) \in [f^3(B_k);f^2(B_k)]$. 若不然,则$f^2(B_k) \in [f(B_k);f^3(B_k)]$

$$\subset [B_k;f^2(B_k)] \leftrightarrows [f(B_k);A_k] \tag{8.10}$$

这蕴含f有3—周期点. 与假设矛盾. 引理8.1证毕.

引理8.1给我们描绘出一个有趣的图景:如果f有$(2n+1)$-周期轨而对$m \in [1,n-1]$没有$(2m+1)$-周期轨,则其周期点在f

作用下，运动情形如图 8.1 所示.（画出了 $n=3$ 的情形.）

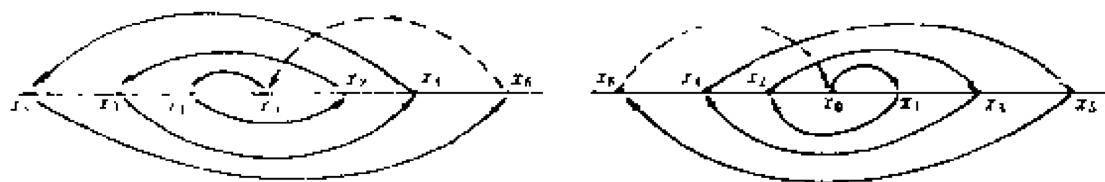


图 8.1

现在我们可以完成沙可夫斯基定理的证明了. 把引理 8.1 中的$[x_0;x_1]$记作 I_1，$I_2=[x_0;x_2]$，$I_3=[x_1;x_3]$，$\cdots I_{2n-1}=[x_{2n-3};x_{2n-1}]$，$I_{2n}=[x_{2n-2};x_{2n}]$. 由引理 8.1，得到覆盖图：



将(8.11)与引理 7.3 相配合，注意到诸 I_k 之间两两无公共内点，可得：

推论 8.1　设 $f(x)$是线段 I 上的连续自映射，对某个 $n\geqslant 1$，f 有$(2n+1)$-周期轨. 则对任意正整数 $k>2n+1$，f 有 k-周期轨

证明　不妨设对于 $1\leqslant m<n$，f 没有 $2m+1$-周期轨，就可以应用引理 8.1 了. 对 $k>2n+1$，由(8.11)得

$$\underbrace{I_1\to I_1\to I_1\to\cdots\to I_1}_{k-(2n-1)\text{个}}\to I_2\to I_3\to\cdots\to I_{2n}\to I_1 \tag{8.12}$$

再应用引理 7.3 即可. 证毕.

推论 8.2　设 $f(x)$是线段 I 上的连续自映射，对某个 $n\geqslant 1$，f 有$(2n+1)$-周期轨，则对任意正整数 k，f 有 $2k$—周期轨.

证明　只要证明 $k\leqslant n$ 的情形就够了. $k>n$ 时可引用推论 8.1. 由(8.11)，对 $k=1,2,\cdots,n$ 均有

$$I_{2k-1}\to I_{2k}\to I_{2k+1}\to\cdots\to I_{2n}\to I_{2k-1} \tag{8.13}$$

再应用引理 7.3，即知 f 有 $(2(n-k)+2)$-周期轨. k 从 1 变到 n，得到 $2,4,6,\cdots,2n$ 周期轨. 证毕.

综合定理 7.5、定理 7.8 及这两个推论，沙可夫斯基定理的结论中，只剩下一种情形尚未获证. 即 $m=2^k p$，$k\geqslant 1$，且 p 为大于 1 的奇数的情形. 此时因定理中的 n 满足 $m\lhd n$，故 $n=2^t q$，这里 q 是奇数. 当 $q=1$ 时，t 为任意非负整数 $1<q\leqslant p$ 时，t 为大于 k 的任意整数. $q>p$ 时，t 为不小于 k 的任意整数.

不妨设对一切 $l\lhd m$，f 无 l-周期轨.

令 $\varphi(x)=f^{2^k}(x)$，则由定理 7.3，φ 有 p-周期轨. 由推论 8.2，φ 有 2^t—周期轨，这里 t 是任意非负整数. 由推论 7.2 及定理 7.8，f 有一切 2^t—周期轨. 于是对 $n=2^t q$，$q=1$ 的情形获证.

现在设 $n=2^t q$，q 是大于 1 的奇数且 $m\lhd n$，于是必须有 $t\geqslant k$. 令 $t=k+s$，则 $p\lhd 2^s q$. 由推论 8.1 及 8.2 可知，φ 有 $2^s q$ 周期点 x^*. 再用推论 7.1，由于 $2^k|n$，可知 x^* 是 f 的 $2^k\cdot 2^s q$ 周期点，即 n-周期点.

沙可夫斯基定理全部证毕.

整个证明虽颇复杂，但并不高深，微分、积分、线性代数……这些起码的高等数学都没用上，而仅仅作具体的组合排序的讨论. 由于定理本身包含了丰富的内容，证明时要涉及各种情形，想要它太简单看来是不容易的.

沙可夫斯基定理告诉我们：如果连续自映射 f 有 m-周期点，则对 $m\lhd n$，f 有 n-周期点. 要是把 f 稍微改变一点——用数学语言说就是把 f 扰动一下——使 f 变成和它很接近的 $g(x)$，$g(x)$ 是不是也有 n—周期点呢？回答是肯定的. 这叫做“沙可夫斯基周期轨的稳定性”.

定理 8.2 设 f 是线段 I 上的连续自映射. f 有 m-周期点，则

存在 $\varepsilon>0$,使得对一切满足条件

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon \qquad (对一切 x\in I) \tag{8.14}$$

的 I 上的连续自映射 g,当 $m\lhd n$ 时,g 有 n-周期点.

这里不给出定理 8.2 的详细证明了. 我们只给出两个关键的引理. 利用这两条引理,读者不难用证明沙可夫斯基定理的类似的方法,完成定理 8.2 的证明.

引理 8.2 设 $f(x)$是线段 I 上的连续自映射. 对 $n\geqslant1$,f 有 $2n+1$-周期点. 则存在 $\varepsilon>0$,使得任一满足条件(8.14)的 I 上的连续自映射 g 有$(2n+3)$-周期点.

证明 不妨设对 $1\leqslant m<n$,f 无$(2m+1)$-周期点. 由引理 8.1,必存在 f 的某个$(2n+1)$-周期点 x_0,使得下列两情形有一成立:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)} & f^{2n}(x_0)<f^{2n-2}(x_0)<\cdots<f^2(x_0)<x_0<f(x_0)\\
& <f^3(x_0)<\cdots<f^{2n-1}(x_0)\\
\text{(ii)} & f^{2n-1}(x_0)<f^{2n-3}(x_0)<\cdots<f^3(x_0)<f(x_0)\\
& <x_0<f^2(x_0)<\cdots<f^{2n-2}(x_0)<f^{2n}(x_0)
\end{array}\right\} \tag{8.15}$$

设情形(i)成立. 由于 $f(x_0)>x_0$,$f(f(x_0))<x_0$,故在$(x_0,f(x_0))$ $f^{2n}(x_0)$内有一点 y_1 使 $f(y_1)=x_0$. 同理,在(x_0,y_1)内有 y_0 使 $f(y_0)=y_1$. 于是得到不等式

$$\begin{cases}
f^{2n+1}(y_0)<f^{2n}(y_0)<\cdots<f^2(y_0)\\
<y_0<f(y_0)<f^3(y_0)<\cdots<f^{2n+1}(y_0)\\
f^{2n+3}(y_0)=f^{2n+1}(x_0)=x_0<y_0
\end{cases} \tag{8.16}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时,满足(8.14)的 $g(x)$也将有不等式:

$$\begin{cases}
g^{2n+2}(y_0)<g^{2n}(y_0)<\cdots<g^2(y_0)\\
<y_0<g(y_0)<g^3(y_0)<\cdots<g^{2n+1}(y_0)\\
g^{2n+3}(y_0)<y_0
\end{cases} \tag{8.17}$$

令 $I_1=[y_0,g(y_0)]$,$I_2=[g^2(y_0),y_0]$,$I_3=[g(y_0),g^3(y_0)]$, $I_4=$

$[g^4(y_0), g^2(y_0)], \cdots, I_{2n+1}=[g^{2n-1}(y_0), g^{2n+1}(y_0)], I_{2n+2}(y_0)=[g^{2n+2}(y_0), g^{2n}(y_0)]$. 则有

$$\subset I_1 \to I_2 \to I_3 \to \cdots \to I_{2n+1} \to I_{2n+2} \to I_1 \qquad (8.18)$$

由(8.18)及引理 7.3 可知,g 有$(2n+3)$-周期点,

若情形(ii)成立. 由 $f(x_0)<x_0, f(f(x_0))>x_0$,故在$(f(x_0), x_0)$内有 y_1 使 $f(y_1)=x_0$,同理在(y_1, x_0)内有 y_0 使 $f(y_0)=y_1$. 以下几乎可以逐句照搬情形(i)之证明. 从略,引理 8.2 证毕.

引理 8.3　设 f 是线段 I 上的连续自映射. f 有 4-周期点,则存在 $\varepsilon>0$,使得若 I 上的连续自映射 $g(x)$满足条件(8.14),则 $g(x)$有 2-周期点.

证明　不妨假设对于 $m\geqslant 1$, f 无$(2m+1)$-周期点. 否则可应用引理 8.2 及定理 8.1 立刻知道引理 8.3 之结论为真.

设 $x_1<x_2<x_3<x_4$ 是 f 的一个 4-周期轨. 我们分几种情形讨论:

1°　若 $f(x_2)=x_1$,则 $f(x_1)>x_2, f^2(x_1)>x_2$,故得

$$\subset [x_1, x_2] \leftrightarrows [x_2, f(x_1)]$$

这蕴含 f 有 3-周期点,与假设不符. 同理,不能有 $f(x_3)=x_4$.

2°　若 $f(x_3)=x_1, f(x_1)=x_2$,则必有 $f(x_2)=x_4, f(x_4)=x_3$. 故

$$[x_1, x_2] \leftrightarrows [x_2, x_3] \supset$$

则 f 也有 3—周期点. 与假设不符.

3°　若 $f(x_3)=x_1, f(x_1)=x_4$,则 $f(x_4)=x_2, f(x_2)=x_3$. 于是

$$f^2(x_1) > x_1, f^2(x_2) < x_2 \qquad (8.19)$$

我们指出,f 在$[x_1, x_2]$上没有不动点. 若不然,有 $x_0\in(x_1, x_2)$使 $f(x_0)=x_0$,则

$$[x_0, x_2] \leftrightarrows [x_2, x_3] \supset$$

亦推出 f 有 3-周期点,故在$[x_1, x_2]$上恒有

$$f(x) > x \qquad (x \in [x_1, x_2]) \tag{8.20}$$

于是当 $\varepsilon>0$ 足够小时，满足 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ 的连续映射 $g(x)$，使对应于(8.19)、(8.20)的不等式

$$\left.\begin{array}{l} g^2(x_1) > x_1, g^2(x_2) < x_2 \\ g(x) > x \qquad (x \in [x_1, x_2]) \end{array}\right\} \tag{8.21}$$

成立．这立刻推出 g 在$[x_1,x_2]$上有 2-周期点．

4° 若 $f(x_4)=x_1, f(x_1)=x_2$，必有 $f(x_2)=x_3, f(x_3)=x_4$．与 1° 类似，将推出 f 有 3-周期点．

5° 若 $f(x_4)=x_1; f(x_1)=x_3$，必有 $f(x_3)=x_2, f(x_2)=x_4$．此时有

$$f^2(x_1) > x_1, f^2(x_2) < x_2 \tag{8.22}$$

以下证明方法完全与情形 3°相同．

1°～5°已穷尽了一切可能．故引理 8.3 获证．

读者试从这两个引理出发，完成定理 8.2 之证明．

我们还可以从反面来讨论沙可夫斯基定理：对于给定的正整数 m，是否有某个区间上的连续自映射 f，使得 f 有 m-周期点，但对一切 $n \lhd m$，f 没有 n－周期点呢？回答是肯定的．为了简便，引入集合记号：

$$\left.\begin{array}{l} N(m) = \{n \mid n \text{ 正整数}, m \lhd n, \text{或 } n = m\} \\ N(2^\infty) = \{2^t \mid t = 0,1,2,3,\cdots\} \end{array}\right\} \tag{8.23}$$

则有

定理 8.3 对任意给定的正整数集 $N=N(m)$或 $N=N(2^\infty)$，存在$[0,1]$上的连续自映射 f，使 f 的周期点的周期之集恰为集合 N．

这个定理的证明将在本书§11中详述．

§9 超稳定周期轨的 S 序与费根堡现象

一元二次函数,它的图象是抛物线.数学家对抛物线及其他二次曲线的研究,早在两千多年前已达到相当完善的程度,以致使后代学者很难在这个领域有新的发现.阿波罗纽斯的出色著作《圆锥曲线》,其中包含了有关二次曲线的近 500 个命题,它不仅是古典希腊几何的登峰造极之作,即使今天看来,也是十分出色的作品.

但是,一旦把观点变一变,从迭代的角度来考察二次函数,我们马上会发现:对二次函数迭代的动力系性质,还知之甚少,认真探求下去,确实能够有宝贵的发现.

近年来,由生态学中提出了虫口差分方程的定性研究课题,激起了人们对二次函数迭代的兴趣.按照一个简化了的数学模型,某类无世代交叠的昆虫,若它今年的虫口数为 x_n,则明年的虫口数为

$$x_{n+1} = x_n(a - bx_n) \quad (a > 0, b > 0, a - bx_n > 0) \tag{9.1}$$

对(9.1)作适当的变量代换,可化为差分方程

$$x_{n+1}=1-\mu x_n^2 \quad (0<\mu<2, x_n\in[-1,1]) \tag{9.2}$$

这里 μ 是参数,它由昆虫的种类及环境条件的假设而定.很显然,对(9.2)的研究,可归结为对函数

$$f_\mu(x)=1-\mu x^2 \quad (0<\mu<2, x\in[-1,1]) \tag{9.3}$$

的迭代的研究.因为给定了某年昆虫的初始数量 x_0 之后,就有 $x_n=f_\mu^n(x_0)$.想知道 x_n 的变化趋势,就只有研究 $f_\mu^n(x)$ 的性质.例如:如果 x_0 是 f_μ 的 5—周期点,我们就可以期望,如果昆虫初始数量为 x_0,而且有关条件确定的参数值为 μ,则虫口数将出现以 5 年为

周期的变化规律.

然而在实际上,虫口数是难于精确统计的,参数值 μ 也是难于精密估计的.于是,我们就自然会问:如果初始虫口数 x_1 和 x_0 之差很小,参数值 μ_1 和 μ 也差不多,那么,虫口数是否仍然会有大致以5年为周期的变化规律呢?

不难证明,如果 x_0 是所谓"稳定的"周期点,特别是"超稳定的"周期点的话,x_0 和 μ 的小扰动将不会影响这种5年为周期的变化规律.

一般而言,设 x_0 是可微函数 $f(x)$的 n-周期点,如果

$$(f^n(x))'|_{x_0} < 1 \tag{9.4}$$

就说 x_0 是 f 的稳定周期点.$\{f^k(x_0)\,|\,k=0,1,\cdots,n-1\}$叫做 f 的一个稳定周期轨.如果进一步有

$$(f^n(x))'|_{x_0} = 0 \tag{9.5}$$

则称 x_0 为超稳定周期点,$\{f^k(x_0)\,|\,k=0,1,2,\cdots,n-1\}$叫做超稳定周期轨.

稳定的和超稳定的周期轨,往往对应于实际问题中能够观察到和易于计算出来的周期现象.因为这种周期现象不因初始数据不够准确和计算误差的微小干扰而有显著的变化.于是,稳定的和超稳定的周期轨的存在性,自然成了大家所关心的事.

20世纪70年代中,美国物理学家费根堡(M. J. Feigenbaum)对函数族 $f_\mu(x)=1-\mu x^2$ 进行了系统的、细致的数值研究.他发现,当参数 μ 由0开始逐渐增大时,f_μ 的迭代的动力系性质在一系列关键的 μ 值处会发生有趣的突变.对应于某个 $\mu=\mu_1$,f_{μ_1}有超稳定的2-周期点(易知 $\mu_1=1$);当 μ 变大到某个值 $\mu=\mu_2$ 时,f_{μ_2}有超稳定的4-周期点;……,而对应于 $\mu_n>\mu_{n-1}$,f_{μ_n}有超稳定的 2^n-周期点.当 μ 继续增大时,f_μ 又会有超稳定的 2^kp($p>1$ 为奇数)周期点,最

后出现超稳定的 3-周期点. 巧得很,超稳定周期轨按参数 μ 的增长,第一次出现的顺序恰恰与沙可夫斯基序的逆序相符,这是不是反映了某个普遍的规律呢?

费根堡还发现了更为有趣的现象. 设 $\mu=\mu_n$ 是使 f_μ 有超稳定的 2^n-周期轨的最小的 μ 值. $\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n<\cdots$,当 $n\to+\infty$ 时,μ_n 有确定的极限 $\mu_\infty<2$. 并且

$$\lim_{n\to+\infty}(\mu_\infty-\mu_n)^{\frac{1}{n}}=\delta^{-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_n-\mu_{n-1}}\tag{9.6}$$

这里

$$\delta=4.669201609\cdots\cdots\tag{9.7}$$

令人惊奇的是,这个 δ 的值并不完全依赖于函数族(9.3),它是一个"普适常数". 费根堡用另一些单峰函数族代替(9.3),仍然看到了类似的情形,并且算出了同一个 δ 值.(但要注意的是:他所用的函数族中的函数,都具有非零的二阶微商)

就是这个 δ,还在涉及倍周期分岔现象的许多物理问题中出现,因而引起了不同学科的学者的兴趣.

为了解释这个有趣的现象,费根堡和另一些数学家已做了不少工作,初步说明了产生这一现象的原因,这个方向的工作还在向前发展.

在数学和自然科学中,最常用到的最重要的常数是圆周率 π,这已是常识. 稍微知道一点高等数学的人,会认识另一个也很重要的常数—自然对数的底 e. 谁是第三个重要的常数呢? 有人认为,就是这个 δ. 这个 δ 能否当之无愧,自然还要待科学发展的考验. 但仅从已知的事实来看,它也确是"第三常数"的无与匹敌的候选者.

在这本书里,我们不可能阐述费根堡现象的数学根据,因为那要用去数十页的篇幅,还要读者有更多的数学上的准备. 但是,超

稳定周期轨在函数族中随参数变化按沙可夫斯基序出现，却是可以用初等方法证明的.

为了叙述的方便，对所讨论的函数族的性质先作一些说明. 我们称函数族 $f_r(x)(r\in[\alpha,\beta],x\in[a_r,b_r])$ 为 C^1-单峰族，如果有以下四条成立：

1° 对任一 $r\in[\alpha,\beta]$，$f_r'(x)$ 连续.

2° 对任一 $r\in[\alpha,\beta]$，$f_r(a_r)=f_r(b_r)=a_r$.

3° 对任一 $r\in[\alpha,\beta]$，有 $c_r\in(a_r,b_r)$ 使 $f_r'(c_r)=0$，$f_r(c_r)\in[a_r,b_r]$，而且当 $x\in[a_r,c_r)$ 时 $f_r'(x)>0$，当 $x\in(c_r,b_r]$ 时 $f_r'(x)<0$.

4° $a_r,b_r,f_r(x),f_r'(x)$ 都是 r 的连续函数. 即当 $r\to r_0$ 时

$$\sup_{x\in[a_{r_0},b_{r_0}]}(|a_r-a_{r_0}|+|b_r-b_{r_0}|+|f_r(x)-f_{r_0}(x)|+|f_r'(x)-f_{r_0}'(x)|)\to 0.$$

如果此外还有

5° $f_\alpha(c_\alpha)<c_\alpha$，且 $f_\beta(c_\beta)=b_\beta$，

则称 $f_r(x)$ 是满的 C^1-单峰族.

如果 $[\alpha,\beta]=[0,1]$，$[a_r,b_r]=[0,1]$，$c_r=\dfrac{1}{2}$，就说 $f_r(x)$ 是规范化了的. 显然，C^1-单峰族一定可以经过 C^1-拓扑共轭进行规范化. 即可以找到微分同胚族 $h_r:[0,1]\to[a_r,b_r]$，使

$$h_r^{-1}\circ f_r\circ h_r=g_r \tag{9.8}$$

是规范化了的 C^1-单峰族，且如果 f_r 是满的，g_r 也是满的.

如果在定义中，把 2°改为"$f_r(a_r)=f_r(b_r)=b_r$"，3°和 5°中的不等式反向，5°中的"$f_\beta(c_\beta)=b_\beta$"改为"$f_\beta(c_\beta)=a_\beta$"，则得到 C^1-单谷族的定义. 易知 C^1-单谷族可经过 C^1-拓扑共轭化为 C^1-单峰族. 例如：若 $f_r(x)$ 为 $[a_r,b_r]$ 上的 C^1-单谷族，则

$$g_r(x)=a_r+b_r-f_r(a_r+b_r-x) \tag{9.9}$$

为 $[a_r,b_r]$ 的 C^1-单峰族. 反之亦然.

定理 9.1　设 $f_r(x)$ 是满的 C^1-单峰族. 则对任意正整数 n，有 r_n 使 $f_{r_n}(x)$ 有超稳定 n-周期轨. 并且若按沙可夫斯基序有 $n \lhd m$，则 r_n 的最小值必大于 r_m 的最小值.

定理 9.1 的证明　不失一般性，假设 $f_r(x)$ 是已经规范化了的、满的 C^1-单峰族，这样，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 是 f_r 的 n-周期点时，f_r 才具有超稳定的 n-周期轨.

我们把整个证明分成几个引理和它们的推论.

引理 9.1　存在 $r_0 \in (0,1)$，使 $f_{r_0}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，且有 $\delta>0$ 使对一切 $r\in(r_0,r_0+\delta)$，有

(i)　有 $x_r^*=f_r(x_r^*)$，　$x_r^*>\frac{1}{2}$；

(ii)　当 n 为奇数时，$\frac{1}{2}<x_r^*<f_r^n(\frac{1}{2})<f_r(\frac{1}{2})$；

(iii)　当 n 为偶数时，$\frac{1}{2}<f_r^n(\frac{1}{2})<x_r^*$.

证明　由条件 5°及介值定理，确有 $r_0\in(0,1)$ 使 $f_{r_0}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，所有这样的 r_0 中有最大者，不妨设 r_0 就是最大者. 由 $f_1(\frac{1}{2})=1>\frac{1}{2}$ 可知，当 $r\in(r_0,1)$ 时，有 $f_r(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$. 又因 $f_r(1)=0<1$，故在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有 x_r^* 使 $f_r(x_r^*)=x_r^*$，即(i). 由于 f_r 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上递减，这样的 x_r^* 对给定的 r 还是唯一的. 由此还可推知

$$f_r(\frac{1}{2})>f_r(x_r^*)=x_r^*>\frac{1}{2} \tag{9.10}$$

另一方面，

$$f_r^2(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=f_r^2(x_r^*)-\frac{1}{2}+f_r^2(\frac{1}{2})-f_r^2(x_r^*)$$

$$=(x_r^*-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-x_r^*)(f_r^2)'\big|_{\xi\in(\frac{1}{2},x_r^*)} \tag{9.11}$$

因 $(f_r^2)'_{\frac{1}{2}}=0$，故当 $r\to r_0$ 时，有 $x_r^*\to\frac{1}{2}$，因而 $(f_r^2)'|_\xi\to 0$. 可见当 $\delta>0$ 足够小时，对 $r\in(r_0,r_0+\delta)$，有

$$f_r^2(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}\tag{9.12}$$

由(9.10)、(9.12)及 f_r 在$[\frac{1}{2},1]$上递减，即得(ii)、(iii). 证毕.

以下把引理 9.1 中断言存在的 r_0 中之最大者记为 $r_{0,H}$，而 x_r^* 专用以记$(\frac{1}{2},1)$内的 f_r 的唯一不动点.

推论 9.1　存在 $r_3\in(r_{0,H},1)$使 $f_{r_3}^3(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，且 $f_{r_3}(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$，$f_{r_3}^2(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$.

证明　由 f_1 是满的，故 $f_1^3(\frac{1}{2})=0<\frac{1}{2}$. 由引理 9.1 之(ii)，对充分接近 $r_{0,H}$ 的 $r>r_{0,H}$，有 $f_r^3(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$. 由介值定理，有 r_3 使 $f_{r_3}^3(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 由 $r_{0,H}$是 r_0 中之最大者，故不能有 $f_{r_3}(\frac{1}{2})\leqslant\frac{1}{2}$. 另外，当 $f_{r_3}^2(\frac{1}{2})\geqslant\frac{1}{2}$时，由

$$\frac{1}{2}\leqslant f_{r_3}^2(\frac{1}{2})<x_{r_3}^*\tag{9.13}$$

将得 $f_{r_3}^3(\frac{1}{2})>x_{r_3}^*>\frac{1}{2}$，矛盾，故 $f_{r_3}^2(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$. 证毕.

推论 9.2　存在 $r_1\in(r_{0,H},r_3)$，使 $f_{r_1}^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f_{r_1}(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$.

证明　由引理 9.1 之(iii)，取 $n=2$，得 $f_r^2(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$. 结合推论 9.1 中之 $f_{r_3}^2(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$可知，有 $r_1\in(r_{0,H},r_3)$使 $f_{r_1}^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，如果 $f_{r_1}(\frac{1}{2})\leqslant\frac{1}{2}$，由于引理 9.1，$f_r(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$在$(r_{0,H},r_{0,H}+\delta)$内成

立，则可推出在$[r_{0,H}+\delta, r_1]$上，有$\tilde{r}$使$f_{\tilde{r}}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，这与$r_{0,H}$之最大性矛盾，故$f_{r_1}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 证毕.

推论 9.3 若有r使对某个$n>1$有$f_r^n(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$而$f_r(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$，则有$r_1\in(0,r]$，使$f_{r_1}^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，但$f_{r_1}(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$.

证明 由$f_r^n(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$及$f_r(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$，显然，只能$f_r(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$. 因若$f_r(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$，则当$x\in[\frac{1}{2},1]$时，$f_r(x)\in[0,\frac{1}{2})$，但$f_r$又在$[0,\frac{1}{2}]$上递增，只能有1-周期点.

我们断言必有$f_r^2(\frac{1}{2})\leqslant\frac{1}{2}$.（若不然，由$f_r^2(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$及$f_r(\frac{1}{2})>x_r^*>\frac{1}{2}$可知，$f_r$把$[\frac{1}{2},f_r(\frac{1}{2})]$映到$(\frac{1}{2},f_r(\frac{1}{2}))$内，从而不可能有$f_r^n(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$). 若$f_r^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，则结论已真. 若$f_r^2(\frac{1}{2})<\frac{1}{2}$，在$(0,r)$中取最大的$r_0$，使$f_{r_0}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，由引理 9.1，对足够小的$\delta>0$，有$f_{r_0+\delta}^2(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}$. 再用介值定理，即知推论 9.3 成立.

以下的r_1、r_3的保持它在以上推论中的用法. 即r_1满足$f_{r_1}^2(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$r_3$满足$f_{r_3}^3(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 但$f_{r_1}(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$，$f_{r_3}(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$. 并用$r_{1,H}$、$r_{1,L}$、$r_{3,H}$、$r_{3,L}$分别记$r_1$和$r_3$中的最大者和最小者.

引理 9.2 存在$\tilde{r}\in(r_{0,H}, r_{3,L})$，使

$$f_{\tilde{r}}^3(\frac{1}{2})=x_{\tilde{r}}^* \tag{9.14}$$

证明 因$f_{r_{3,L}}^3(x)=\frac{1}{2}<x_{r_{3,L}}^*$. 又由引理 9.1 之(ii)，

$f^3_{r_{0,H}+\delta}(\frac{1}{2})>x^*_{r_{0,H}+\delta}$. 又因 $f^3_r(\frac{1}{2})-x^*_r$ 显然是 r 的连续函数，用介值定理即可. 证毕.

以下用 $x_r^{*'}$ 记 $(0,\frac{1}{2})$ 内满足 $f_r(x_r^{*'})=x_r^*$ 的那个唯一的 x. 则有：

推论 9.4　对引理 9.2 中之 $\bar{r}$ 而言，$f_{\bar{r}}^2(\frac{1}{2})=x_{\bar{r}}^{*'}$. 若设 $\bar{r}_L$ 是这样的 $\bar{r}$ 中的最小者，则对 $r\in[0,\bar{r}_L]$ 及奇数 $p>1$，f_r 没有超稳定的 p-周期轨.

证明　对 $r=0$ 或 $\bar{r}_L$，f_r 显然无超稳定周期轨. 若对某个 $r=\hat{r}\in(0,\bar{r}_L)$ 和奇数 $p>1$，使

$$f_{\hat{r}}^p(\frac{1}{2})=\frac{1}{2} \tag{9.15}$$

且 $f_{\hat{r}}(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}$，则必有 $f_{\hat{r}}^2(\frac{1}{2})<x_{\hat{r}}^{*'}$（否则由 $f_{\hat{r}}(x_{\hat{r}}^{*'})=f_{\hat{r}}(x_{\hat{r}}^*)=x_{\hat{r}}^*$ 及 $f_{\hat{r}}^2(\frac{1}{2})<x_{\hat{r}}^*$，将推出

$$f_{\hat{r}}^{p-1}(\frac{1}{2})\in[x_{\hat{r}}^{*'},x_{\hat{r}}^{*'}] \tag{9.16}$$

这与(9.15)矛盾)，因而

$$f_{\hat{r}}^2(\frac{1}{2})<x_{\hat{r}}^{*'}<\frac{1}{2} \tag{9.17}$$

另一方面，若以 $\hat{r}_0$ 记$[0,\hat{r}]$中的 r_0 之最大者，由引理 9.1，对足够小的 $\delta>0$，有

$$f_{\hat{r}_0+\delta}^2(\frac{1}{2})>\frac{1}{2}>x_{\hat{r}_0+\delta}^{*'} \tag{9.18}$$

从而有 $r'\in(\hat{r}_0+\delta,\hat{r})\subset(0,\bar{r}_L)$，使 $f_{r'}^2(\frac{1}{2})=x_{r'}^{*'}$，这与 $\bar{r}_L$ 的最小性矛盾. 证毕.

以下我们用 $r_{2n+1}(n\geqslant1)$ 记满足条件

$$f_{r_{2n+1}}^{2n+1}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2} \quad (\text{对 } m=1,2,\cdots,2n-1, f_{r_{2n+1}}^{m}(\frac{1}{2})\neq\frac{1}{2}) \tag{9.19}$$

的参数值 r. 分别以 $r_{2n+1,H}$ 和 $r_{2n+1,L}$ 记其最大者和最小者，则我们有

推论 9.5 $r_{2n+1,L}>r_{2n+3,L}$.

证明 对 $n=1,2,\cdots$ 用数学归纳. 只要能证明在 $(0,r_{2n+1,L})$ 内有一个 r_{2n+3} 就够了.

在推论 9.4 的证明中，我们已知道(参看(9.17))：

$$f_{r_{2n+1,L}}^{2n+3}(\frac{1}{2})=f_{r_{2n+1,L}}^{2}(\frac{1}{2})<x_{r_{2n+1,L}}^{*'}<\frac{1}{2} \tag{9.20}$$

设 $\bar{r}_0$ 为 $(0,r_{2n+1,L})$ 中 r_0 之最大者. 由引理 9.1，有足够小的 $\delta>0$，使

$$f_{\bar{r}_0+\delta}^{2n+3}(\frac{1}{2})>\frac{1}{2} \tag{9.21}$$

结合(9.20)与(9.21)可知，有 $r_{2n+3}\in(0,r_{2n+1,L})$，使 $f_{r_{2n+3}}^{2n+5}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 由归纳假设可知，对 $1<m<2n+3$，不会有 $f_{r_{2n+3}}^{m}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 证毕.

由推论 9.5 及推论 9.1，定理 9.1 中 n 为奇数的部份已经获证. 为处理 $n=2^kp(k\geqslant1,p\geqslant3$ 为奇数)的情形，我们还需要下面的引理.

引理 9.3 设 $\bar{r}_L$ 如推论 9.4 中所述：即满足 $f_r^2(\frac{1}{2})=r_r^{*'}$ 的 $\bar{r}$ 中之最小者. $\bar{r}_0$ 是 $[0,\bar{r}_L]$ 中 r_0 之最大者. 则对足够小的 $\delta>0$，

$$g_r(x)=f_r^2(x) \quad (r\in[\bar{r}_0+\delta,\bar{r}_L],x\in[x_r^{*'},x_r^{*}]) \tag{9.22}$$

是满的 C^1-单谷族.

证明 只须验证满的单谷族的定义中的

2° $g_r(x_r^{*'})=g_r(x_r^{*})=x_r^{*}$，这显然.

3° $g_r(\frac{1}{2}) \in [x_r^{*\prime}, x_r^*]$，这由 $\bar{r}_l$ 的最小性保证. 又当有 $x \in [x_r^{*\prime}, \frac{1}{2}]$时，$g_r'(x) < 0$，而当 $x \in (\frac{1}{2}, x_r^*]$时 $g_r'(x) > 0$，这由 $f_r'(x)$在$[x_*, f_r(\frac{1}{2})]$上为负保证.

5° $g_{r_0+\delta}(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$， $g_{\bar{r}_L}(\frac{1}{2}) = x_{\bar{r}}^{*\prime}$. 这由引理 9.1 及 $\bar{r}_L$ 之定义保证. 证毕.

对族 $g_r(x)$使用引理 9.1、引理 9.2 及其诸推论，即可证明定理 9.1 中 n 或 m 为 $2p$($p \geqslant 3$ 为奇数)之情形. 再反复使用引理 9.3，对 $f_r^4, f_r^8, \cdots, f_r^{2^k}, \cdots$使用引理 9.1、引理 9.2 及其诸推论，即可知定理 9.1 对 n 与 m 均非 2 的方幂的情形成立. 剩下的是考虑 $m = 2^k$ 的情形.

由推论 9.2 及推论 9.3，有 r_1 中之最小者 $r_{1,L}$. 使当 $r \in [0, r_{1,L})$时，f_r 至多只有超稳定不动点. 再在$[r_{1,L}, \bar{r}_L]$上考虑族 $f_r^2(x)$，再用推论 9.2 及推论 9.3，即可断言存在最小的 $r_{1,L}'$，使 $f_{r_{1,L}'}$有超稳定 4-周期轨. 而当 $r \in [0, r_{1,L}')$时，f_r 至多只有超稳定的不动点或 2－周期轨. 依此对 2^k 中之 k 作数学归纳，即可完成定理 9.1 中 $m = 2^k$ 情形的证明. 详细步骤从略.

§10 周期点集稠密的连续映射与马蹄

连续函数的周期点之集可能是什么样子的集合呢？

它可以是单点集，有限点集. 如果这些周期点的周期有界的话，它显然是闭集. 容易证明：连续映射的周期点之集，一定可以表为可数个闭集的并.

读者也不难证明：线段 I 到自身的连续映射 f，如果任一个 $x\in I$ 都是 f 的周期点，则 f 一定是严格单调的．如果 f 递增，则 $f(x)\equiv x$．如果 f 递减，则 f 有一个不动点，其余的点都是 2-周期点，例如 $f(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)=a-x$ 等．

但是，连续函数的周期点之集也可以有相当复杂的结构．我们就要介绍的两个例：一个简单一些，它的周期点集和非周期点集都在定义区间上稠密．另一个复杂一些，它的周期点集的闭包（即周期点集及其极限点集之并）构成一个康托完全集．①

例 10.1　令 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$之定义为：

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2})\\ 2(1-x) & (\frac{1}{2}<x\leqslant 1)\end{cases}\tag{10.1}$$

则对任意正整数 n，φ 有 n-周期点．并且 φ 的周期点集和非周期点集都在$[0,1]$上稠密．$\varphi(x)$是一个很简单的函数，它的图象如图 10.1 所示．

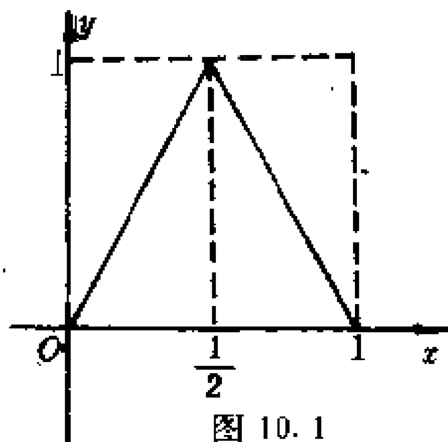


图 10.1

把 $x\in[0,1]$表成 2 进小数：

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2_k},\quad (a_k=0\text{ 或 }1)\tag{10.2}$$

由定义可知：对 x 如(10.2)，则若设 $\bar{a}_k=1-a_k$，有

① 若点集 M 和它闭包相等，M 叫完全集．直线上的无处稠密的完全集——即不含任何小区间的完全集——叫康托完全集．例如：把[0,1]中的点表成三进小数，表示中只用到 0 与 1 的点所成之集．

$$\varphi(x)=\begin{cases}0.a_2a_3\cdots a_k\cdots & (\text{当 } a_1=0)\\ 0.\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots\bar{a}_k\cdots & (\text{当 } a_1=1)\end{cases} \tag{10.3}$$

或者写成：

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_1-a_{k+1}|}{2^k} \tag{10.4}$$

如果 x 是(0,1]中的二分有理点

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k000\cdots\cdots \tag{10.5}$$

或

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k111\cdots \tag{10.6}$$

则显然有 $\varphi^k(x)=0$ 或 $\varphi^{k+1}(x)=0$，可见 x 一定不是周期点. 由此可见，φ 的非周期点在[0,1]上稠密.

下面指出，φ 有 3—周期点. 例如，令

$$x^*=0.110110110110\cdots \tag{10.7}$$

则有

$$\varphi(x^*)=0.01001001001\cdots \tag{10.8}$$

$$\varphi^2(x^*)=0.100100100100\cdots\cdots \tag{10.9}$$

$$\varphi^3(x^*)=0.110110110\cdots\cdots=x^* \tag{10.10}$$

可见 x^* 是 3-周期点. 事实上，$x^*=\frac{6}{7}$，$\varphi(x^*)=\frac{2}{7}$，$\varphi^2(x^*)=\frac{4}{7}$，而 $\varphi^3(x^*)=\varphi(\frac{4}{7})=\frac{6}{7}$.

根据沙可夫斯基定理，φ 有一切 n—周期点.

下面进一步指出，φ 的周期点集在[0,1]上是稠密的：任给一个点 $x\in[0,1]$，任意指定一个正整数 m，

$$x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots \tag{10.11}$$

我们一定能找到一个 $\bar{x}$，$\bar{x}$ 是周期点，且 $|x-\bar{x}|<\frac{1}{2^m}$. 其实这很简单. 只要令

$$\bar{x}_1 = 0.a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots \tag{10.12}$$

$$\bar{x}_2 = a.a_1a_2\cdots a_k\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_ka_1a_2\cdots a_k\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_k \tag{10.13}$$

则由定义可知，$\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 中至少有一个是周期不大于 k 的周期点，而且显然有 $|x-\bar{x}_1|<\frac{1}{2^k}$ 和 $|x-\bar{x}_2|<\frac{1}{2^k}$，取 $k\geqslant m$ 即可.

下面的例，虽然复杂但更为有趣：

例 10.2　（线段上的马蹄映射）设 $h(x)$ 是 $[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$ 上的自映射. $h'(x)$ 存在而且连续，满足条件

(i)　在 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 上，有 $|h'(x)|>q>1$.

(ii)　在 $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ 上有 $h(x)>1$.

(iii)　在 $[1,\frac{4}{3}]$ 上有 $-\frac{1}{3}<h(x)<0$.

(iv)　在 $[-\frac{1}{3},0]$ 上有

$$-\frac{1}{3}<h(x)<0,h'(x)>0.$$

(v)　$h(x)$ 在 $[-\frac{1}{3},0]$ 上有唯一的不动点 x^*，$h'(x^*)<1$.

则 $h(x)$ 叫做 $[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$ 上的一个马蹄型映射.

图 10.2 画出了 $h(x)$ 的图象. 它大致像一块马蹄铁.

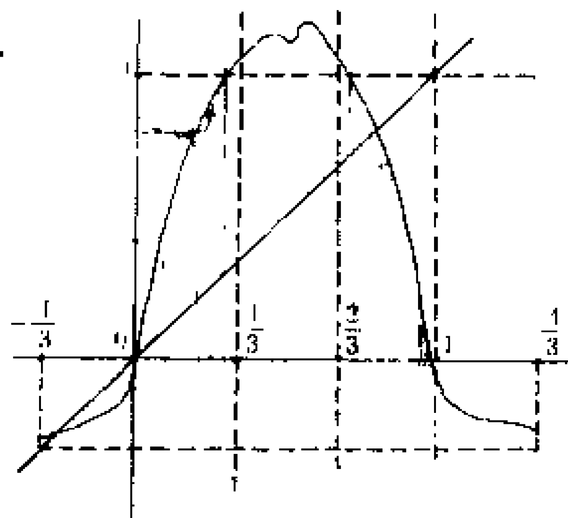


图 10.2

根据条件(ii)、(iii)、(iv)可知，有 a_1、b_1、a_2、b_2 且 $0<a_1<b_1<\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}<a_2<b_2<1$，使 $h(a_1)=h(b_2)=0$ 及 $h(b_1)=h(a_2)=1$. 记

$$J_1=[-\frac{1}{3},a_1),\ I_2=[a_1,b_1]$$

$\Delta_3=(b_1,a_2)$，$\Delta_4=[a_2,b_2]$

$\Delta_5=(b_2,\frac{4}{3}]$

然后对每个 $x\in[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$，赋予 x 一个序列

$$I(x)=I_0I_1I_2\cdots \tag{10.14}$$

其中 $I_k(k=0,1,2\cdots)$取值为 1、2、3、4、5 之一. 取法为

$$I_k=j \quad (\text{当且仅当 } h^k(x)\in\Delta_j, j=1,2,3,4,5) \tag{10.15}$$

这样，序列 $I(x)$描述了点 x 在 h 作用下运动的状况. 我们称 $I(x)$为 x 的踪迹. 用踪迹研究迭代，叫"符号动力系"方法.

关于踪迹的性质，有以下几个简单命题：

命题 10.1　若 $I(x)=I_0I_1I_2\cdots$，则

$$I(h(x))=I_1I_2I_3\cdots \tag{10.16}$$

也就是说：把 x 的踪迹的第一个数码划去，便得到 $h(x)$的踪迹. 这是符号动力系的方便之处. 命题 10.1 由踪迹定义是显然的.

命题 10.2　若 $I(x)=I_0I_1I_2\cdots I_k\cdots$，则

当 $I_k=1$ 时，对一切自然数 m，$I_{k+m}=1$，

当 $I_k=5$ 时，对一切自然数 m，$I_{k+m}=1$，

当 $I_k=3$ 时，$I_{k+1}=5$，　对一切自然数 $m>1$，$I_{k+m}=1$.

在这三种情形下，均有 $\lim\limits_{n\to+\infty}h^n(x)=x^*$.

命题 10.2 可由 $h(x)$之性质及 Δ_j 之定义立刻推出，证明从略.

命题 10.3　若

$$x_1=I_0I_1I_2\cdots I_kI_{k+1}\cdots$$

$$x_2=I_0I_1I_2\cdots I_kJ_{k+1}\cdots \tag{10.17}$$

并且 I_k 不为奇数. 则有

$$|h^{k+1}(x_1)-h^{k+1}(x_2)|\geqslant q^{k+1}|x_1-x_2| \tag{10.18}$$

证明 由命题 10.2 可知，当 I_k 不为奇数时，I_0、$I_1\cdots I_{k-1}$ 也都非奇数．由 $h(x)$ 之性质(i)可知对 $0\leqslant j\leqslant k$ 均有

$$|h(h^j(x_1))-h(h^j(x_2))|=|h'(\xi_j)(h^j(x_1)-h^j(x_2))| \quad (\xi_j\in\Delta_{I_j})$$
$$\geqslant q|h^j(x_1)-h^j(x_2)|$$

再递推，即可得(10.18)

命题 10.4 若令 $i_l=2$ 或 $4, l=0,1,2,\cdots,k$,

$$A_{i_0i_1\cdots i_k}=\{x|h^l(x)\in\Delta_{i_l},\quad l=0,1,2,\cdots,k\} \tag{10.19}$$

则有

1° $A_{i_0,i_1,\cdots,i_k}\subset A_{i_0,i_1,\cdots,i_{k-1}}$.

2° $I(x)=I_0I_1I_2\cdots I_k\cdots$ 的充要条件是

$$x\in\bigcap_{k=0}^{\infty}A_{I_0I_1\cdots I_k}$$

3° $h(A_{i_0i_1\cdots i_k})=A_{i_1i_2\cdots i_k}$.

4° $A_{i_0i_1\cdots i_k}$ 是具有正长度的闭区间.

证明 1°和 2°是显然的.

3° 若 $x\in A_{i_0i_1\cdots i_k}$，显然有 $h(x)\in A_{i_1i_2\cdots i_k}$. 反之，若有 $y\in A_{i_1i_2\cdots i_k}$，则 $y\in\Delta_{i_1}$. 由 h 的性质知，$h(\Delta_{i_0})\supset\triangle_{i_1}$，故有 $x\in\Delta_{i_0}$ 使 $h(x)=y$，由 $y\in A_{i_1i_2\cdots i_k}$ 易知 $x\in A_{i_0i_1\cdots i_k}$.

4° 对 k 进行数学归纳. $k=0$ 时显然. 若对 $k=l$ 命题为真，即 $A_{i_1i_2\cdots i_{l+1}}$ 是 Δ_{i_1} 的闭子区间. 这时 $A_{i_0i_1\cdots i_{l+1}}$ 是 Δ_{i_0} 的子集. 由 3°，有

$$h(A_{i_0i_1\cdots i_{l+1}})=A_{i_1i_2\cdots i_{l+1}} \tag{10.20}$$

但 h 在 Δ_{i_0} 上连续严格单调，故闭区间的原像是闭区间. 证毕.

现在，我们来分析在 h 作用下，$[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}]$ 上的点 x 的运动趋势. 把这些 x 分成两类：若 $I(x)$ 中有奇数码出现，则 x 为甲类，否则为乙类.

显然，若 x 是甲类点，则 x 的足够小邻域内的点也属于甲类.

这时，有 $\lim_{n\to+\infty} h^n(x)=x^*$. 甲类点之集显然是开集.

若 x 为乙类点，则必有 $h^n(x)\in \Delta_2\cup\Delta_4\ (n=0,1,2,\cdots)$这时，对每个 x，有唯一的由 2 与 4 组成的序列 $I(x)$与之对应. 由命题 10.3 可知，若 $x_1\neq x_2$，则 $I(x_1)\neq I(x_2)$. 若 $I(x_1)$与 $I(x_2)$的前面足够多项对应相同，则$|x_1-x_2|$可以任意小. 具体地说，若 $I(x_1)$与 $I(x_2)$中前 k 个数码相同，则必有

$$|x_1-x_2|\leqslant 2q^{-k} \tag{10.21}$$

另一方面，对于任给的由 2 和 4 组成的无穷列

$$I=I_0I_1I_2\cdots I_k\cdots$$

由命题 10.4 之 1°与 4°可知，$\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}A_{I_0I_1\cdots I_k}$非空. 这就证明了乙类中的点可以和所有的由 2 与 4 组成的序列一一对应.

我们指出，乙类中的点都是 h 的周期点的极限点. 事实上，若乙类中的 x 的踪迹为

$$I(x)=I_0I_1\cdots I_k\cdots$$

取 J 为 2 或 4，但 $J\neq I_{k+1}$. 令 x_k 是使下式成立的点

$$I(x_k)=I_0I_1\cdots I_kJI_0I_1\cdots I_kJI_0I_1\cdots I_kJ\cdots$$

则 $x_k\neq x$，x_k 为 h 的周期点，且 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k=x$.

由于甲类点之集在$\left[-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right]$中是开的，故乙类点之集是闭的. 从而乙类点集是完全集.

显然，任两个乙类点之间有甲类点，可见乙类点之集是无处稠密的.

在后面（第 15 节），将介绍游荡点与非游荡点的重要概念. 那时再回头来看这个例子，便可知乙类点之集是 h 的全体非游荡点之集. 通常把 h 的全体非游荡点之集记作 $\Omega(h)$. 以上的讨论可以说明：$\Omega(h)$是 h 的周期点集 $P(h)$的闭包，是康托完全集.

由于 h 的性质(i)－(Ⅴ)都是用与 $h(x)$ 和 $h'(x)$ 有关的不等式定义的. 故有 $\varepsilon>0$,使得当 $\tilde{h}$ 满足

$$|h(x)-\tilde{h}(x)|+|h'(x)-\tilde{h}'(x)|<\varepsilon \tag{10.22}$$

时,$\tilde{h}(x)$ 也满足(i)—(Ⅴ). 于是对 $\tilde{h}$,可定义

$$\tilde{I}(x)=I_0I_1I_2\cdots I_k\cdots \tag{10.23}$$

当且仅当

$$\tilde{h}^k(x)\in\Delta_{I_k}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{10.24}$$

时成立,这时,若 $\tilde{I}(x)$ 全由 2 与 4 组成,则也有 $x\in\Omega(\tilde{h})$. 再在 $\Omega(h)$ 上定义

$$f:\Omega(h)\to\Omega(\tilde{h}) \tag{10.25}$$

使得

$$f(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad I(x)=\tilde{I}(y) \tag{10.26}$$

则容易推知:f 是连续的,一对一的,而且有

$$f^{-1}\circ\tilde{h}\circ f(x)=h(x)\qquad(x\in\Omega(h)) \tag{10.27}$$

这个事实叫做 h 在 C^1 扰动下具有 Ω 稳定性. 这是马蹄型映射的重要性质之一.

§ 11 有关沙可夫斯基定理的一个反问题

假设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 我们记 $P(f)$ 为 f 的周期点集;$PP(f)$ 为 f 的周期点的周期构成的集合,即

$$PP(f)=\{n\geqslant1\,|\,f\text{ 有一个 }n\text{-周期点}\}.$$

根据沙可夫斯基定理(定理 8.1),$PP(f)$ 或者形如

$$N(m)=\{n;m\lhd n\text{ 或 }m=n\}$$

或者是

$$N(2^{\infty})=\{2^{i}:i=0,1,2,\cdots\}.$$

所有这些正整数集合的子集 $N(m)$ 和 $N(2^{\infty})$ 都称为沙可夫斯基节.这样一来,沙可夫斯基定理可以重新叙述为:线段上每一个连续自映射的周期点的周期构成的集合都是某一个沙可夫斯基节.人们自然要问这样一个反问题:是否每一个沙可夫斯基节都是线段上某一个连续自映射的周期点的周期构成的集合 $PP(f)$ 呢?本节将讨论这个问题并作出肯定的回答(参见定理 11.1).我们先来证明一个简单的引理.

引理 11.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射,并且 f 在线段 $J\subset I$ 上是严格单调的.如果 f 有一个 n-周期轨 $\{p_1,\cdots p_n\}\subset J$,则 $n\leqslant 2$.

证明　用反证法.假设 $n\geqslant 3$.如果有必要的话,重新排列一下 $p_1,\cdots,p_n$ 的次序,使得 $p_1<p_2<\cdots<p_n$.由于 $n\geqslant 3$,或者有一个 i,$1<i<n$,使得 $f(p_i)=p_1$,或者有一个 j,$1<j<n$,使得 $f(p_j)=p_n$.不失一般性,假设第一个条件成立.这时,由于 $p_1<p_i$ 以及 $f(p_i)=p_1<f(p_1)$,所以 f 在 J 上是严格递减的.因此由于 $p_i<p_{i+1}$,则有 $f(p_{i+1})<f(p_i)=p_1$.p_1 的左边出现了这个周期轨中的点 $f(p_{i+1})$ 这与 $p_1<p_2<\cdots<p_n$ 矛盾.

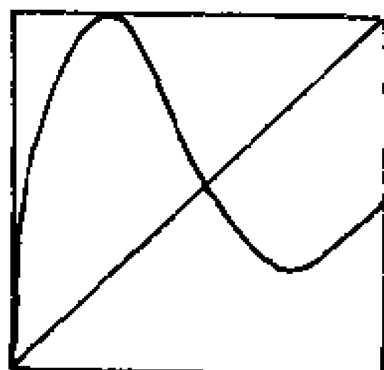
现在我们着手解决本节开头所提出的问题.首先给出一个一般的方法,根据这一方法,可以从给定的某一映射 f 出发构造出一个新的映射 f^{*}.f^{*} 称作 f 的史迭芬方根,而这个方法则称为史迭芬方根技巧.现详述如下:

对于线段[0,1]上任意一个给定的连续自映射 f,我们按部就班做下面三件事:(1)把 f 的图象画在一个正方块 $[0,1]\times[0,1]$ 中(参见图 11.1(1));(2)将这个正方块 $[0,1]\times[0,1]$ 连同 f 的图象

按水平和垂直方向均匀地压缩成一个较小的正方块$[0,\frac{1}{3}]\times[0,\frac{1}{3}]$(参见图 11.1(2))；(3)另外画一个正方块$[0,1]\times[0,1]$，将经过第(2)步得到的小正方块$[0,\frac{1}{3}]\times[0,\frac{1}{3}]$连同在它里面的经过压缩之后的 f 的图形平移到正方块$[0,1]\times[0,1]$的左上角. 然后，用直线将小正方块中那个图形的最右边的点与点$(\frac{2}{3},0)$连结起来，再用直线将点$(\frac{2}{3},0)$和点$(1,\frac{1}{3})$连结起来. 这三步做完之后，我们在正方块$[0,1]\times[0,1]$中得到了一个新的图象，这个图象所代表的线段$[0,1]$上的自映射记作 f^*，它显然是连续的. f^* 称为 f 的史迭芬方根. 事实上，f 的史迭芬方根 f^* 可以严格地定义如下

$$f^*(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}f(3x)+\frac{2}{3} & \text{当 } x\in[0,\frac{1}{3}] \text{ 时}\\ (-3x+2)k_f & \text{当 } x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}] \text{ 时}\\ x-\frac{2}{3} & \text{当 } x\in[\frac{2}{3},1] \text{ 时}\end{cases}$$

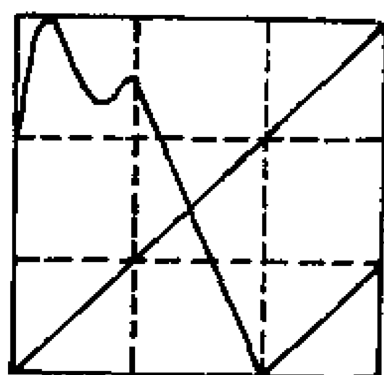
其中 $k_f=\frac{1}{3}f(1)+\frac{2}{3}$.



(1)



(2)



(3)

图　11.1

现在我们来指出 f^* 的一些基本性质. 根据 f^* 的定义易见

$$f^*([0,\frac{1}{3}])\subset[\frac{2}{3},1] \quad 和 \quad f^*([\frac{2}{3},1])=[0,\frac{1}{3}]$$

因此，

(a) 在$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$中都没有f^*的不动点，

(b) 在$[0,\frac{1}{3}]$和$[\frac{2}{3},1]$中的f^*的周期点的周期都是偶数，

(c) f^*的周期轨$\{p_1,\cdots,p_n\}$中如果有一个点在$[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$中，那么这整个周期轨都包含于$[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$.

设e是f^*的不动点，据(a)，$e\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 因此$e$必须满足方程

$$(-3e+2)k_f=e$$

这个方程有唯一解$e_f=\frac{2k_f}{3k_f+1}$. 因此，

(d) f^*有唯一的一个不动点$e_f=\frac{2k_f}{3k_f+1}$.

设$\{p_1,\cdots,p_n\}$是f^*的n—周期点$p\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$的周期轨. 据(c)，$\{p_1,\cdots,p_n\}\subset(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 由于$f^*$在$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$上是严格递减的，根据引理 11.1，有$n\leqslant 2$. 如果$n=1$，据(d)，$p=e_f$. 现设$n=2$. 由于$p,f(p)\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 所以$p$应满足方程

$$(-3(-3p+2)k_f+2)k_f=p$$

然而这一方程只有唯一解$p=e_f$. 这与$n=2$矛盾. 所以

(e) 在$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$中除不动点$e_f$外不再有$f^*$的周期点.

据(e)和(b)我们又有(f).

(f) f^*除e_f以外的周期点的周期都是偶数.

(g) 对于任意$x\in[0,\frac{1}{3}]$，有

$$(f^*)^{2k}(x)=\frac{1}{3}f^k(3x)$$

其中$k=1,2,\cdots$.

我们归纳证明(g)如下:

当 $x\in[0,\frac{1}{3}]$时,

$$f^*(x)=\frac{1}{3}f(3x)+\frac{2}{3}\in[\frac{2}{3},1]$$

因此,

$$(f^*)^2(x)=\frac{1}{3}f(3x)$$

这证明当 $k=1$ 时,(g)成立.现在假设(g)对于某一整数 $k>0$ 成立.则当 $x\in[0,\frac{1}{3}]$时,

$$\begin{aligned}(f^*)^{2k+1}(x)&=(f^*)^{2k}((f^*)^2(x))\\&=(f^*)^{2k}(\frac{1}{3}f(3x))\\&=\frac{1}{3}f^{k+1}\quad(3x)\end{aligned}$$

即(g)对于整数 $k+1$ 成立.据归纳原则,(g)对于任意 $k=1,2,\cdots$成立.(g)证毕.

根据(g),如果 x 是 f 的 n-周期点,则

$$(f^*)^{2k}(\frac{1}{3}x)=\frac{1}{3}f^k(x)\begin{cases}\neq\frac{1}{3}x & \text{当 } k=1,\cdots,n-1\\=\frac{1}{3}x & \text{当 } k=n,\end{cases}$$

并且当 $k=0,\cdots,n-1$ 时,

$$\begin{aligned}(f^*)^{2k+1}(\frac{1}{3}x)&=f^*(\frac{1}{3}f^k(x))\\&=\frac{1}{3}f^{k+1}(x)+\frac{2}{3}\neq\frac{1}{3}x\end{aligned}$$

因而$\frac{1}{3}x$是 f^*的 $2n$-周期点.这表明

$$PP(f^*)\supset 2PP(f)\cup\{1\}$$

其中 $2PP(f)=\{2m;m\in PP(f)\}$

另一方面，设 y 是 f^* 的 $2n$—周期点，$n>1$. 根据(c)和(e)，$y\in[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. 如果 $y\in[0,\frac{1}{3}]$，根据(g)，有

$$f^k(3y)=3(f^*)^{2k}(y)\begin{cases}\neq 3y & k=1,\cdots,n-1\\ =3y & k=n\end{cases}$$

因而 $3y$ 是 f 的 n—周期点；如果 $y\in[\frac{2}{3},1]$，那么 $f^*(y)\in[0,\frac{1}{3}]$ 是 f^* 的 $2n$-周期点，因而 $3f^*(y)$是 f 的 n-周期点. 根据这一论证以及(d)和(f)，我们又有

$$PP(f^*)\subset 2PP(f)\cup\{1\}$$

因此，我们已经证明了

引理 11.2 设 f^*是线段[0,1]上连续自映射的史迭芬方根，则

$$PP(f^*)=2PP(f)\cup\{1\}$$

现在，我们对于每一个奇数 $2k+1>1$，来定义[0,1]上的一个连续自映射 μ_{2k+1}，使得 $PP(\mu_{2k+1})=N(2k+1)$. 首先，令

$$x_0=\frac{1}{2},$$

$$x_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2k},x_3=\frac{1}{2}+\frac{2}{2k},\cdots,x_{2i+1}=\frac{1}{2}+\frac{i+1}{2k},\cdots,x_{2k-1}=1,$$

$$x_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2k},x_4=\frac{1}{2}-\frac{2}{2k},\cdots,x_{2i}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2k},\cdots,x_{2k}=0.$$

然后定义线段[0,1]上一个自映射 μ_{2k+1}，使得满足条件：

(a) $\mu_{2k+1}(x_0)=x_1,\cdots,\mu_{2k+1}(x_i)=x_{i+1},\cdots,\mu_{2k+1}(x_{2k})=x_0$；

(b) μ_{2k+1}在线段$[x_{2k},x_{2k-1}],\cdots,[x_4,x_2],[x_2,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_3],\cdots,[x_{2k-3},x_{2k-1}]$上都是线性的.

显然，μ_{2k+1}是连续映射.（μ_5 的图象参见图 11.2）

现在，我们来讨论 μ_{2k+1}的若干基本性质. 首先，易见

(1) $\{x_0,x_1,\cdots,x_{2k}\}$是 μ_{2k+1}的一个$(2k+1)$-周期轨.

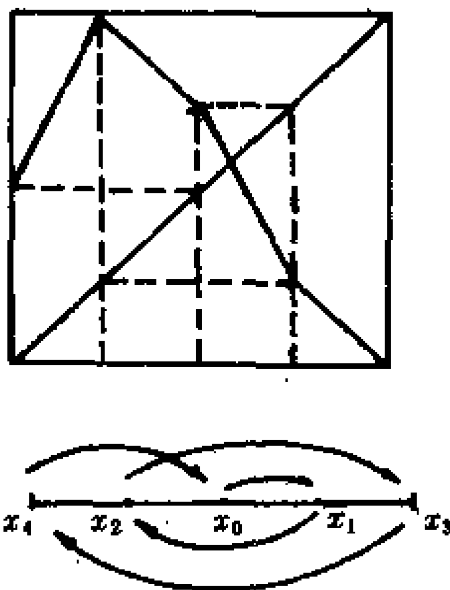


图 11.2

其次，容易验证

$$\mu_{2k+1}([0,x_{2k-2}]) = [x_0,1]$$

以及对于任意 $0\leqslant i\leqslant k-1$，

$$\mu_{2k+1}([x_{2i},1]) = [0,x_{2i+1}]$$

$$\mu_{2k+1}([0,x_{2i+1}]) = [x_{2i+2},0]$$

因而，

$$\mu_{2k+1}^{2k-1}([0,x_{2k-2}]) = [x_{2k-2},1]$$

所以，我们有

(2) 在$[0,x_{2k-2}]$中 μ_{2k+1}没有$(2k-1)$-周期点.

最后，由于 μ_{2k+1}在$[x_{2k-2},1]$上是严格递减的，并根据引理 11.1，我们有

(3) 对于任意 $n\geqslant 3$，在$[x_{2k-2},1]$中不包含 μ_{2k+1}的任何 n-周期轨.

综合以上结论(1)，(2)和(3)，我们得到

引理 11.3 设 μ_{2k+1}定义如前. 则当 $k\geqslant 1$ 时，μ_{2k+1}有一个$(2k+1)$-周期点；当 $k>1$ 时，μ_{2k+1}没有$(2k-1)$－周期点.

因此，根据沙可夫斯基定理，对于任意整数 $k\geqslant 0$，

$$PP(\mu_{2k+1}) = N(2k+1)$$

我们再来定义线段$[0,1]$上一个连续自映射 st，我们称它为史迭芬映射，使得 $PP(st) = N(2^{\infty})$. 首先，令

$$I_i = [\frac{1}{3^i},\frac{1}{3^{i-1}}], \qquad i = 1,2,\cdots$$

显然，

$$I = \{0\}\bigcup(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i).$$

其次，定义 st_1 为从 I_1 到$[0,1]$的连续映射，使得

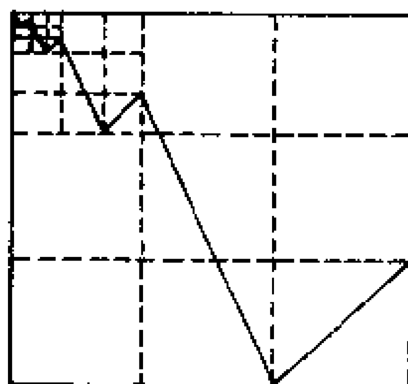
$$st_1(x)=\begin{cases}(-3x+2)\dfrac{7}{9} & \text{当 } x\in[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}],\\ x-\dfrac{2}{3} & \text{当 } x\in[\dfrac{2}{3},1],\end{cases}$$

最后定义[0,1]上的自映射 st 使得对于任意 $x\in I$，

$$st(x)=\begin{cases}st_i(x) & \text{当 } x\in I_i\\ 1 & \text{当 } x=0\end{cases}$$

其中

$$st_i(x)=\frac{1}{3}st_{i-1}(3x)+\frac{2}{3},i=2,3,\cdots$$


图 11.3

(st 的图象参见图 11.3.)请读者自行验证 st 的定义是合理的，并且 st 是一个连续映射. 我们现在来证明：

引理 11.4　设史迭芬映射 st 定义如前. st^* 是 st 的史迭芬方根，则

$$st^*=st$$

证明　根据 st^* 的定义，易于直接验证：对于 $x\in I_1$，

$$st^*(x)=st(x)$$

现设 $x\in I_i$，$i\geqslant2$. 这时，$3x\in I_{i-1}$，因而

$$\begin{aligned}st^*(x)&=\frac{1}{3}st(3x)+\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{3}st_{i-1}(3x)+\frac{2}{3}\\&=st_i(x)\\&=st(x)\end{aligned}$$

此外，我们还有

$$st^*(0)=\frac{1}{3}st(0)+\frac{2}{3}$$

$$=1$$

这就证明了引理.

引理 11.5 设史迭芬映射 st 定义如前.则

$$PP(st) = N(2^\infty)$$

证明 记 st 的史迭芬方根为 st^* 如前.根据引理 11.4 和引理 11.2,我们有

$$PP(st) = 2PP(st) \cup \{1\}$$

其中 $2PP(st)=\{2m;m\in PP(st)\}$.由此式易见

(a) $1\in PP(st)$并且若 $m\in PP(st)$则 $2m\in PP(st)$.

(b) 若 $n\in PP(st)$,则或者 $n=1$ 或者 $n=2m, m\in PP(st)$.由(a)易见

$$N(2^\infty) \subset PP(st)$$

由(b)可见,若 $2^ik\in PP(st)$,其中 $k>1$ 为奇数,则 $2^{i-1}k,\cdots,k\in PP(st)$,而 $k\in PP(st)$又与(b)矛盾,所以对于任意 $k>1$ 为奇数和任意 $i\geqslant 0$, $2^ik\notin PP(st)$.这样一来

$$PP(st) = N(2^\infty)$$

引理证毕.

至此,已经不难证明本节的下述主要结论了.

定理 11.1 若 N 是一个沙可夫斯基节,则存在着某一个线段$[0,1]$上的连续自映射 g_N 使得 N 恰是 g_N 的周期点的周期构成的集合 $PP(g_N)$.

证明 我们分三种情形来证明这个定理.

(i) $N=N(2^\infty)$.这种情形已由引理 11.5 证明.只要取 g_N 为史迭芬映射 st 即可.

(ii) $N=N(2^j)$,其中 $j\geqslant 0$.

令 i 为$[0,1]$上的恒同自映射.易见 $PP(i)=\{1\}=N(2^0)$.

因此，在这种情形下，当 $j=0$ 时定理为真．现在设对于某一 $j\geq 0$，$N=N(2^j)$ 时，定理为真．即有[0,1]上的连续自映射 $g_{N(2^j)}$ 使得 $PP(g_{N(2^j)})=N(2^j)$．现令 $g_{N(2^{j+1})}$ 为 $g_{N(2^j)}$ 的史迭芬方根，根据引理 11.2，我们有

$$\begin{aligned} PP(g_{N(2^{j+1})}) &= 2PP(g_{N(2^j)}) \cup \{1\} \\ &= 2N(2^j) \cup \{1\} \\ &= N(2^{j+1}) \end{aligned}$$

根据归纳原则，情形(ii)证毕．

(iii)　$N=N(2^j s)$，其中 $j\geq 0$，$s>1$ 为奇数．

我们对 j 进行归纳，根据引理 11.3，当 $j=0$ 时，定理为真．假设对于某一 $j\geq 0$ 和任意 $s>1$ 为奇数定理为真，也就是说存在[0,1]上的连续自映射 $g_{N(2^j s)}$，使得

$$PP(g_{N(2^j s)}) = N(2^j s).$$

现令 $g_{N(2^{j+1}s)}$ 为 $g_{N(2^j s)}$ 的史迭芬方根．根据引理 11.2，

$$\begin{aligned} PP(g_{N(2^{j+1}s)}) &= 2PP(g_{N(2^j s)}) \cup \{1\} \\ &= 2N_{(2^j s)} \cup \{1\} \\ &= N(2^{j+1}s) \end{aligned}$$

这也就是说，对于 $j+1$ 和任意 $s>1$ 为奇数，在情形(iii)下，定理也为真．根据归纳原则，情形(iii)证毕．

至此，定理 11.1 的证明全部完成．

我们还想顺便指出，研究史迭芬映射 st 下点的动态性质是十分必要的．在许多情形下，它作为有用的反例起着重要的作用．

§12 周期轨的稳定性

假设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，并且 f 有一个 n-周期点. §8 中的沙可夫斯基定理(定理 8.1)指出：如果正整数 m 按沙可夫斯基顺序居于 n 的后面，也就是说 $n \lhd m$，那么 f 必有 m-周期点. 我们现在要问：如果 g 是线段 I 上的另一个连续自映射，它与 f 充分“接近”，那么我们对于 g 的周期点的周期是否也能给出一些有益的结论呢？本节的主要定理(定理 12.1)指出，沙可夫斯基定理对于映射 f 所给出的结论对于与 f 充分“接近”的映射 g 同样也成立. 这表明沙可夫斯基定理所论述的周期轨的存在性具有某种稳定的性质. 在陈述本节的主要定理之前，我们有必要把“接近”这个词的含义弄准确.

假设 f, g 是线段 I 上的两个连续自映射. 我们定义 f 与 g 的距离为

$$\max\{|f(x) - g(x)| ; x \in I\}$$

并记为 $d(f,g)$. 这样一来，f 与 g 是否“接近”以及它们“接近”的程度便可以按照它们之间距离的大小来确定. 令 $\varepsilon > 0$，与映射 f 的距离小于 ε 的线段 I 上的所有那些连续自映射构成的集合称为映射 f 的 ε—邻域，并记作 $W_\varepsilon(f)$. 这也就是说，线段 I 上的连续自映射 h 属于 $W_\varepsilon(f)$，当且仅当 $d(h,f) < \varepsilon$. 事实上，I 上全体连续自映射的集合 $C^0(I)$ 相对于上述 d 而言是一个度量空间，而 $W_\varepsilon(f)$ 即是以 f 为中心以 ε 为半径的球形邻域. 本节的主要定理是：

定理 12.1 假设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，并且 f 有一个 n-周期点. 则 f 有某一个 ε—邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于 $g \in W_\varepsilon(f)$

和任意按沙可夫斯基顺序居于 n 后面的正整数 m（即 $n\lhd m$），g 必有 m-周期点.

在证明这一定理之前，先证明下列引理 12.1～引理 12.5.

引理 12.1 假设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，x 是 I 中的一点. 如果 $x,f(x),\cdots,f^n(x)$ 这 $n+1$ 个点中每两个点都不相同，则存在 f 的一个 ε—邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$，只要 $f^i(x)<f^j(x)$，$0\leqslant i,j\leqslant n$，便有 $g^i(x)<g^j(x)$.

证明 令

$$\delta=\min\{|x_i-x_j|:0\leqslant i,j\leqslant n;i\neq j\}$$

显然，$\delta>0$. 令 $\delta_n=\delta/2$. 根据 f 的一致连续性（注意，I 是有界闭区间），选取 $0<\delta_{n-1}<\delta_n$，使得当 $u,v\in I$ 并且 $|u-v|<\delta_{n-1}$ 时，$|f(u)-f(v)|<\delta_n/2$；选取 $0<\delta_{n-2}<\delta_{n-1}$，使得当 $u,v\in I$ 并且 $|u-v|<\delta_{n-2}$ 时，$|f(u)-f(v)|<\delta_{n-1}/2$；……这样逐步做下去，经过有限步骤，我们可以选定 $0<\delta_2<\delta_3$；最后一步是选取 $0<\delta_1<\delta_2$，使得当 $u,v\in I$ 并且 $|u-v|<\delta_1$ 时，$|f(u)-f(v)|<\delta_2/2$. 综上，我们有：$0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_n=\delta/2$，并且对于 $i=1,2,\cdots,n-1$，如果 $u,v\in I$ 并且 $|u-v|<\delta_i$，那么 $|f(u)-f(v)|<\delta_{i+1}/2$.

令 $\varepsilon=\delta_1/2$. 以下证明 f 的 ε—邻域 $W_\varepsilon(f)$ 满足引理要求.

任取 $g\in W_\varepsilon(f)$. 我们有

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon<\delta_1$$

$$\begin{aligned}|f^2(x)-g^2(x)|&\leqslant|f^2(x)-f(g(x))|+|f(g(x))-g^2(x)|\\&<\delta_2/2+\varepsilon<\delta_2\\&\cdots\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f^n(x)-g^n(x)|&\leqslant|f^n(x)-f(g^{n-1}(x))|+|f(g^{n-1}(x))-g^n(x)|\\&<\delta_n/2+\varepsilon<\delta_n\end{aligned}$$

因而，对于 $i=1,2\cdots,n$，有

$$|f^i(x) - g^i(x)| < \delta/2$$

现设 $f^i(x)<f^j(x)$，其中 $0\leqslant i,j\leqslant n$. 由于 $|f^i(x)-g^i(x)|<\delta/2$ 和 $|f^j(x)-g^j(x)|<\delta/2$. 故有 $g^i(x)<\frac{1}{2}(f^i(x)+f^j(x))$ 和 $g^j(x)>\frac{1}{2}(f^i(x)+g^j(x))$. 因此，$g^i(x)<g^j(x)$，引理 11.1 证毕.

引理 12.2　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，$k\geqslant 1$ 是一个奇的正整数. 如果存在一个点 $y_0\in I$ 使得

$$y_{k-2} < y_{k-4} < \cdots < y_3 < y_1 < y_0 < y_2 < y_4 < \cdots < y_{k-1}$$

并且 $y_0<y_k$，其中 $y_i=f^i(y_0)$，$i=1,\cdots k$，那么，f 有一个 k-周期点.

证明　由于 $f(y_0)=y_1<y_0$ 以及 $f(y_1)=y_2>y_1$，所以 f 有一个不动点 $e\in(y_1,y)$. 令 $M_0=[e,y_0]$，$M_1=[y_1,e]$，以及

$$M_2=[y_0,y_2], M_4=[y_2,y_4], \cdots, M_{k-1}=[y_{k-3},y_{k-1}],$$

$$M_3=[y_3,y_1], M_5=[y_5,y_3], \cdots, M_{k-2}=[y_{k-2},y_{k-4}].$$

这时，我们有

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{f} M_3 \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} M_{k-2} \xrightarrow{f} M_{k-1} \xrightarrow{f} M_0.$$

根据引理 7.3，存在 $x_0\in M_0$ 使得 $f^k(x_0)=x_0$，并且对于 $i=0,1,\cdots,k-1$ 有 $f^i(x_0)\in M_i$. 我们要证明 x_0 恰是 f 的 k-周期点. 为此，只需证明 $x_0\neq f^i(x_0)$，$i=1,\cdots,k-1$. 现分成三种情况证明如下：

(i)　当 $i=3,4,\cdots,k-1$ 时，由于 $M_0\cap M_i=\varnothing$，而 $x_0\in M_0$，$f^i(x_0)\in M_i$，所以此时 $x_0\neq f^i(x_0)$.

(ii)　如果 $x_0=f(x_0)$，那么 $x_0=f(x_0)\in M_0\cap M_1=\{e\}$. 因此，$x_0=e$. 这样一来 $f^3(x_0)=e\in M_3$，这当然是不可能的. 因而，$x_0\neq f(x_0)$.

(iii) 如果 $x_0=f^2(x_0)$，那么 $x_0=f^2(x_0)\in M_0\cap M_2=\{y\}$. 因此，$x_0=y$. 然而 $f^k(y)\neq y$，这与 $f^k(x_0)=x_0$ 矛盾. 这也说明 $x_0\neq f^2(x_0)$.

至此，引理 12.2 证毕.

引理 12.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，并且 f 有一个 k-周期点，其中 k 是一个异于 1 的奇数，则 f 有一个 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$ 都有 $(k+2)$-周期点.

证明 根据沙可夫斯基定理，我们不妨假定 k 满足条件：对于任意 $j=3,5,\cdots,k-2$，f 都没有 j-周期点. 在这一假定下，根据引理 8.1，f 有一个 k-周期点 x_0 使得下面的两个条件之一成立：

(i)
$$x_{k-1}<x_{k-3}<\cdots<x_4<x_2$$
$$<x_0<x_1<x_3<\cdots<x_{k-4}<x_{k-2}$$

(ii)
$$x_{k-2}<x_{k-4}<\cdots<x_3<x_1$$
$$<x_0<x_2<x_4<\cdots<x_{k-3}<x_{k-1}$$

其中 $x_i=f^i(x_0)$，$i=1,2,\cdots,k-1$. 不失一般性，我们假定条件(ii)成立.

这时，由于 $f(x_0)=x_1<x_0$ 以及 $f(x_1)=x_2>x_1$，因而存在不动点 $e\in(x_1,x_0)$. 从而易见，存在 $u\in(x_1,e)$ 使得 $f(u)=x_0$；存在 $v\in(e,x_0)$ 使得 $f(v)=u$. 对于 v，我们有

$$f^k(v)<f^{k-2}(v)<\cdots<f^4(v)<f^2(v)$$
$$<v<f(v)<f^3(v)<\cdots<f^{k+1}(v)$$

(注意，当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，有 $f^{i+2}(v)=x_i$)以及 $f^{k+2}(v)=x_0>v$. 根据引理 12.1，f 有一个 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$，

$$g^k(v)<g^{k-2}(v)<\cdots<g^4(v)<g^2(v)$$
$$<v<g(v)<g^3(v)<\cdots<g^{k+1}(v)$$

以及 $g^{k+2}(v)>v$ 成立. 从面根据引理 12.2，g 有$(k+2)$-周期点. 引理 12.3 证毕.

引理 12.4 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，并且 f 有一个 4-周期点. 则 f 有一个 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得任意 $g\in W_\varepsilon(f)$ 都有 2-

周期点.

证明　假如 f 有 3-周期点. 根据引理 12.3, f 有一个 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$, 使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$ 都有 5-周期点. 根据沙可夫斯基定理, g 也有 2-周期点. 因而在这种情形下引理 12.4 为真.

令 $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ 为 f 的一个 4-周期轨, 其中 $p_1<p_2<p_3<p_4$, 所有可能发生的情况共是六种. (参见图 12.1)

(i)　$f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_3, f(p_3)=p_4, f(p_4)=p_1$;

(ii)　$f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_4, f(p_4)=p_3, f(p_3)=p_1$;

(iii)　$f(p_1)=p_3, f(p_3)=p_4, f(p_4)=p_2, f(p_2)=p_1$;

(iv)　$f(p_1)=p_3, f(p_3)=p_2, f(p_2)=p_4, f(p_4)=p_1$;

(v)　$f(p_1)=p_4, f(p_4)=p_3, f(p_3)=p_2, f(p_2)=p_1$;

(vi)　$f(p_1)=p_4, f(p_4)=p_2, f(p_2)=p_3, f(p_3)=p_1$.

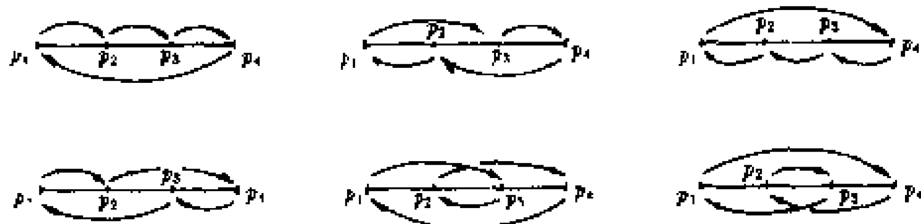


图 12.1

令 $J_1=[p_1,p_2], J_2=[p_2,p_3], J_3=[p_3,p_4]$. 在第(i)种情形下, 我们有

$$J_2 \leftrightarrows J_3 \supset$$

在第(ii)种情形下, 我们有

$$J_1 \leftrightarrows J_2 \supset,$$

在第(iii)种情形下, 我们有

$$\subset J_1 \leftrightarrows J_2 \supset,$$

在第(v)种情形下, 我们有

$$\subset J_1 \leftrightarrows J_2,$$

应用引理 7.3 易见，在以上这几种情形下，f 都有 3—周期点. 因此根据前一段的说明，这时，引理为真.

下面讨论第(iv)和第(vi)两种情形. 注意这两种情形完全是对称的，因此可以作类似的论证. 不失一般性，下面我们只讨论第 iv 种情形. 这时，又有下面两种可能性.

(A)　J_1 中有一个不动点 e(参见图 12.2). 这时，令 $J_{11}=[p_1, e]$, $J_{12}=[e, p_2]$，则有

$$J_{11} \to J_{12} \to J_3 \to J_{11}$$

根据引理 7.1 易见，这时，f 有 3—周期点. 因此在这种情形下引理为真.

(B)　J_1 中没有不动点. 这时

$$\varepsilon_1 = \min\{f(x) - x; x \in J_1\} > 0$$



图 12.2

另一方面，根据引理 11.1，f 有一个 ε_2-邻域 $W_{\varepsilon_2}(f)$，使得对于任意 $g \in W_{\varepsilon_2}(f)$ 都有 $g^2(p_1) > p_1$；f 有一个 ε_3-邻域 $W_{\varepsilon_3}(f)$，使得对于任意 $g \in W_{\varepsilon_3}(f)$ 都有 $g_2(p_2) < p_2$. 令

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1/2, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$$

设 g 属于 f 的 ε-邻域 $W_\varepsilon(f) = W_{\varepsilon_1/2}(f) \cap W_{\varepsilon_2}(f) \cap W_{\varepsilon_3}(f)$. 这时，我们有 $g^2(p_1) > p_1$ 以及 $g^2(p_2) < p_2$. 因此，存在 $z \in (p_1, p_2)$，使得 $g^2(z) = z$. 然而，此时(由于 $g \in W_{\varepsilon_1/2}(f)$)

$$|g(z) - z| \geq |f(z) - z| - |g(z) - f(z)| > 0,$$

所以 $z \neq g(z)$. 因此 z 是 g 的 2—周期点.

引理 12.4 证毕.

引理 12.5　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，$n \geq 0$ 是一个整数. 则对于 f^n 的任意 ε-邻域 $W_\varepsilon(f^n)$，存在着 f 的某一个 δ-邻域

$W_\delta(f)$，使得对于任意 $g\in W_\delta(f)$ 都有 $g^n\in W_\varepsilon(f^n)$.

证明 证明类似于引理 12.1 的证明的前半段.

对于给定的 $\varepsilon>0$. 根据 f 的一致连续性，我们可以选取 $0<\delta_1<\delta_2<\cdots<\delta_{n-1}<\delta_n=\varepsilon$，使得对于每一个 $i=1,2,\cdots,n-1$，如果 $u,v\in I$ 并且 $|u-v|<\delta_i$，则 $|f(u)-f(v)|<\delta_{i+1}/2$.

令 $\delta=\delta_1/2$. 以下证明 f 的 δ-邻域 $W_\delta(f)$ 满足引理要求. 这是因为对于任意 $x\in I$，我们依次有

$$|f(x)-g(x)|<\delta<\delta_1,$$

$$|f^2(x)-g^2(x)|\leqslant|f^2(x)-f(g(x))|+|f(g(x))-g^2(x)|$$

$$<\delta_2/2+\delta<\delta_2,\cdots\cdots,$$

$$|f^n(x)-g^n(x)|\leqslant|f^n(x)-f(g^{n-1}(x))|+|f(g^{n-1}(x)-g^n(x)|$$

$$<\delta_n/2+\delta<\delta_n=\varepsilon.$$

这最后一个不等式说明 $g^n\in W_\varepsilon(f^n)$，正是我们所要证明的. 证毕.

定理 12.1 的证明 分为两种情形讨论.

(i) $n=2^is$，其中 s 是某一个异于 1 的奇数. 这时，由于 f 有 n-周期点，所以 f^{2^i} 有 s-周期点. 对于 f^{2^i} 应用引理 11.3，可见 f^{2^i} 有一个 $\bar{\varepsilon}$-邻域 $W_{\bar{\varepsilon}}(f^{2^i})$，使得任意 $g\in W_{\bar{\varepsilon}}(f^{2^i})$，都有$(s+2)$-周期点. 根据引理 11.5，$f$ 有一个 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$，都有 $g^{2^i}\in W_{\bar{\varepsilon}}(f^{2^i})$. 现设 $g\in W_\varepsilon(f)$. 由于 $g^{2^i}\in W_{\bar{\varepsilon}}(f^{2^i})$，所以 g^{2^i} 有$(s+2)$-周期点. 因此 g 有 $2^i(s+2)$-周期点. 据此以及沙可夫斯基定理易见，当 $n\lhd m$ 时，g 有 m-周期点.

(ii) $n=2^i$. 当 $i=0$ 或 1 时，定理的结论显然成立. 下设 $i\geqslant2$. 令 $r=2^{i-2}$. 由于 f 有 n-周期点，故 f^r 有 4-周期点. 对 f^r 应用引理 12.4 可见，f^r 有一个 $\bar{\varepsilon}$-邻域 $W_{\bar{\varepsilon}}(f_r)$ 使得任意 $g\in W_{\bar{\varepsilon}}(f^r)$ 都有 2－周期点. 根据引理 12.5，选取 f 的 ε-邻域 $W_\varepsilon(f)$，使得对于任意 $g\in W_\varepsilon(f)$ 有 $g^r\in W_{\bar{\varepsilon}}(f^r)$. 因而 g 有 2^{i-1}-周期点. 根据沙可夫斯基定理，

当 $n \lhd m$ 时，f 有 m-周期点. 至此，定理 12.1 证毕.

推论 12.1 设 $f_1, f_2, \cdots$ 是线段 I 上的连续自映射的一个序列，并且这个序列收敛于线段 I 上的连续自映射 f. 如果每一个 f_i 的任何周期点的周期都是 2 的方幂，那么 f 的每一个周期点的周期也都是 2 的方幂.

证明 假如 f 有一个 $2^k s$-周期点，其中 s 为异于 1 的奇数，那么根据定理 12.1，当 i 充分大时，f_i 将有 $2^k(s+2)$－周期点，这与推论 12.1 的假设矛盾. 证毕.

§13 简单周期轨和极小周期轨

让我们再回顾一下第八节中，证明沙可夫斯基定理时用到过的引理 8.1. 这个引理告诉我们，如果某个线段连续自映射有一个 $(2k+3)$-周期轨，但是它没有任何 $(2k+1)$-周期轨，那么这个 $(2k+3)$-周期轨必将遵循极强的规律. 我们要问：对于那些对于任何 $2^n(2k+1)$-周期轨的线段连续自映射，它的每一个 $2^n(2k+3)$-周期轨是否有类似的规律可寻？对于那些周期点的周期都是 2 的方幂的映射，情形又将如何？本节将要研究这些问题. 下述定理 13.1 将是解决这些问题的关键.

定理 13.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 如果存在点 $x \in I$ 和奇数 $n > 1$，使得

$$f^n(x) \leqslant x < f(x) \tag{13.1}$$

或者

$$f(x) < x \leqslant f^n(x) \tag{13.2}$$

之一成立，则 f 有一个 m-周期点，其中 $m > 1$ 能整除 n.

证明 不失一般性，我们假设 $x\in I$ 和奇数 $n>1$ 满足条件(13.1)，并由此出发来证明定理的结论.

如果对于每个 $i=1,2,\cdots n-1$，$f^i(x)>x$ 蕴含着 $f^{i+1}(x)>f^i(x)$，那么由 $x<f(x)$ 可依次推出 $f^2(x)>f(x)>x,\cdots,f^{n-1}(x)>f^{n-2}(x)>x$，以及 $f^n(x)>f^{n-1}(x)>x$. 这最后的不等式与假设矛盾. 因此可断言：存在整数 i，$1\leqslant i\leqslant n-1$，使得 $f^i(x)>x$ 并且 $f^{i+1}(x)<f^i(x)$.

令

$$f^s(x)=\min\left\{f^i(x)\left|\begin{array}{l}f^i(x)>x\\ \text{并且}\\ f^{i+1}(x)<f^i(x);i=1,\cdots,n-1\end{array}\right.\right\};$$

又令

$$f^p(x)=\max\{f^i(x)\,|\,f^i(x)<f^s(x);i=0,\cdots,n\}.$$

显然，$x\leqslant f^p(x)<f^s(x)$，$f^{s+1}(x)<f^s(x)$，$f^{p+1}(x)>f^p(x)$，并且在$(f^p(x),f^s(x))$之中没有任何 $f^i(x)$，$i=0,1,\cdots n$. 所以若令 $\bar{I}=[f^p(x),f^s(x)]$，则有 $\bar{I}\supset$.

对于每一个 $i=0,1,\cdots,n$，令

$$I_i=\begin{cases}[f^i(x),f^s(x)] & \text{若 } f^i(x)\leqslant f^p(x)\\ [f^p(x),f^i(x)] & \text{若 } f^i(x)\geqslant f^s(x)\end{cases}$$

明显地，$I_i\supset\bar{I}$. 再根据 $\bar{I}\supset$，我们有 $f^p(x),f^s(x),f^{s+1}(x)\in f(I_i)$. 因此，$I_{i+1}\subset f(I_i)$. 这也就是说，$I_i\to I_{i+1}$. 这样一来，有

$$I_0\to I_1\to I_2\to\cdots\to I_{n-1}\to I_n$$

由于 $f^n(x)<x<f^p(x)$，因此 $I_n\supset I_0$. 所以

$$I_0\to I_1\to I_2\to\cdots\to I_{n-1}\to I_0$$

我们指出下述论断成立：有一个整数 r，$0\leqslant r\leqslant n-1$，使得或者有 $f^r(x),f^{r+1}(x)\leqslant f^p(x)$，或者有 $f^r(x),f^{r+1}(x)\geqslant f^s(x)$. 为证明这一

点，令

$$K_1 = \{f^i(x) \mid f^i(x) \leqslant f^j(x), i = 0,1,\cdots,n-1\}$$

$$K_2 = \{f^i(x) \mid f^i(x) \geqslant f^k(x), i = 0,1,\cdots,n-1\}$$

当 $f(K_1)\subset k_2$ 并且 $f(K_2)\subset k_1$ 时，有 $x\in k_1$, $f(x)\in k_2,\cdots;f^{n-2}(x)\in k_2$, $f^{n-1}(x)\in k_1$. 由于 $f^r(x)\leqslant x\leqslant f^j(x)$，所以 $r=n-1$ 满足上述论断中的条件；另一方面，如果 $f(k_1)\subset k_2$ 和 $f(k_2)\subset k_1$ 不能同时成立，那么或者有 $f(k_1)\not\subset k_2$，或者有 $f(k_2)\not\subset k_1$. 前者表示有一个 $r=0,1,\cdots,n-1$ 使得 $f^r(x),f^{r+1}(x)\leqslant f^j(x)$，而后者则表示有一个 $r=0,1,\cdots,n-1$ 使得 $f^r(x),f^{r+1}(x)\leqslant f^k(x)$.

现在我们令

$$\dot{I} = \begin{cases} [f^r(x), f^j(x)] & \text{若 } f^r(x), f^{r+1}(x) \leqslant f^j(x) \\ [f^k(x), f^r(x)] & \text{若 } f^r(x), f^{r+1}(x) \geqslant f^k(x) \end{cases}$$

显然，$\dot{I}\subset I_r$ 并且 $f(\dot{I})\supset I_{r+1}$. 因此，我们有

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_{r-1} \to \dot{I} \to I_{r+1} \to \cdots \to I_{n-1} \to I_0$$

根据引理 7.3，有 $y\in I_0$ 使得 $f^n(y)=y$ 并且对于 $i=0,1,\cdots r-1$, $r+1,\cdots,n-1$，有 $f^i(y)\in I_i$ 并且 $f^r(y)\in\dot{I}$. 我们指出 y 不是 f 的不动点，因为假如 y 是 f 的不动点，那么将有 $y=f^r(y)\in\dot{I}$ 以及 $y=f^j(y)\in I_j=[f^j(x),f^k(x)]$. 从而导至 $y=f^j(x)$ 或者 $y=f^k(x)$. 由前者可见 $f^{n-j}(y)=y=f^n(x)=f^j(x)\geqslant x$. 而据假设 $f^k(x)\leqslant x$，因而 $x=f^n(x)=y$ 为 f 的不动点，这与 $x<f(x)$ 的假设矛盾；由后者也可类似地导出矛盾. 由于 $f^n(y)=y$，并且 y 不是 f 的不动点. 所以作为 f 的周期点，y 的周期为 $m>1$ 并且 m 能整除 n. 定理 13.1 证毕.

推论 13.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 又设 f 有 n-周期点，其中 $n>1$ 为奇数；并且对于一切奇数 m，$1<m<n$，f 没有 m-周期点. 则对于任意不是 f 的不动点的 $x\in I$ 下述条件(1)和(2)中必有一个成立：

(1) $x<f^1(x), x<f^3(x), \cdots, x<f^n(x)$;

(2) $x>f^1(x), x>f^2(x), \cdots, x>f^n(x)$.

根据定理 12.1,这个推论是显然的.

我们先来指出,根据推论 13.1 可以重新证明引理 8.1. 假设对于某一个奇数 $n>1$ 线段连续自映射 f 没有 m-周期点,其中 $m>1$ 为任意小于 n 的奇数. 又设 f 有某一个 n-周期轨 P. 将 P 中的 n 个点按大小次序排列并令处于中间位置的那个点是 x. 以下分别两种情形讨论.

(i) $x<f^1(x)$. 这时,根据推论 13.1 我们有 $x<f^1(x), x<f^3(x), \cdots, x<f^{n-2}(x)$. 由于 x 的左边也有 f 的周期轨中的 $\frac{n-1}{2}$ 个点,这些点必然是 $f^2(x), f^4(x), \cdots, f^{n-1}(x)$. 此意即 $f^2(x)<x, f^4(x)<x, \cdots, f^{n-1}(x)<x$. 对于任何奇数 k, $1<k\leqslant n-2$,由于 $f^{k+1}(x)=f(f^2(x))<f^k(x)$,根据推论 13.1,有

$$f^{k-2}(x) = f^{k-2}(f^n(x)) = f^{n-2}(f^k(x)) < f^k(x).$$

因而我们有

$$x < f^1(x) < f^3(x) < \cdots < f^{n-2}(x)$$

类似地,可证

$$f^{n-1}(x) < f^{n-3}(x) < \cdots < f^2(x) < x.$$

因此,在这种情形下有

$$\begin{aligned} f^{n-1}(x) &< f^{n-3}(x) < \cdots < f^2(x) < x \\ &< f(x) < f^3(x) < f^{n-4}(x) < f^{n-2}(x) \end{aligned} \tag{13.3}$$

(ii) $x>f^1(x)$. 完全类似的推证指出,在这种情下有

$$\begin{aligned} f^{n-2}(x) &< f^{n-4}(x) < \cdots < f^3(x) < f(x) < x \\ &< f^2(x) < \cdots < f^{n-3}(x) < f^{n-1}(x) \end{aligned} \tag{13.4}$$

以上就是引理 8.1 的内容. 为了推广这些结论,我们先陈述简单周期轨的定义. 这完整的定义是按归纳原则给出的.

对于任意奇数 $n=1,3,5,7,\cdots$，线段连续自映射 f 的 n-周期轨 p 称为简单 n-周期轨，如果(a) $n=1$，即 P 是 f 的不动点，或者(b) $n>1$，并且 P 中存在点 x 满足不等式(13.3)或不等式(13.4).

假定对于某一整数 $l\geqslant 0$ 任意线段连续自映射 f 的简单 $2^l n$-周期轨已有定义，其中 $n\geqslant 1$ 为任意奇数. 我们定义简单 $2^{l+1}n$-周期轨如下：线段连续自映射 f 的 $2^{l+1}n$-周期轨 $P=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^{l+1}n}\}$ 称为 f 的简单 $2^{l+1}n$-周期轨，如果 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^l n}\}$ 和 $\{x_{2^l n+1},x_{2^l n+2},\cdots\}$ 都是 f 的简单 $2^l n$-周期轨.

根据上述定义，我们给出一些简单周期轨的例子.

(1) 任何不动点都是简单周期轨.

(2) 任何 2-周期轨都是简单周期轨.

(3) 任何 3-周期轨都是简单周期轨.

(4) 图 12.1 中绘出了所有可能的六种 4-周期轨的图形，其中(iv)与(vi)两种情形是简单周期轨而其他情形则不是.

(5) 简单 7-周期轨的图示可参见图 8.1.

(6) 简单 6-周期轨的图示参见图 13.1.

(7) 简单 8-周期轨的例子的图示参见图 13.2.

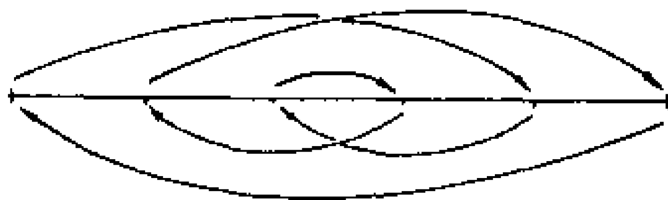


图 13.1

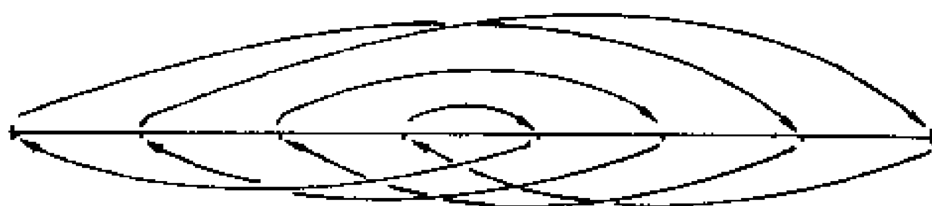


图 13.2

我们现在来着手解决本节开始时提出的问题.

推论 13.2　设 f 为线段 I 上的一个连续自映射. 又设对于任何奇数 $n>1$, f 没有 n-周期点. 如果 $\{x_1,\cdots,x_{2m}\}$ 为 f 的 $2m$—周期轨, $x_1<x_2<\cdots<x_{2m}$, 其中 $m\geqslant 1$ 为任意整数, 则 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 及 $\{x_{m+1},\cdots,x_{2m}\}$ 都是 f^2 的 m-周期轨.

证明　我们先指出 $f(x_{m+1})>x_{m+1}$ 是不可能的. 因为如果 $f(x_{m+1})>x_{m+1}$ 成立, 那么根据推论 12.1 就有 $x_{m+1}<f(x_{m+1})$, $x_{m+1}<f^3(x_{m+1})$, $\cdots$, $x_{m+1}<f^{2m-1}(x_{m+1})$. 这将与在周期轨 $\{x,\cdots,x_{2m}\}$ 中只有 $(m/2-1)$ 个点大于 x_{m+1} 矛盾. 因此必然有 $f(x_{m+1})<x_{m+1}$. 根据推论 12.1, 有 $f(x_{m+1})<x_{m+1}$, $f^3(x_{m+1})<x_{m+1}$, $\cdots f^{2m-1)}x_{m+1})<x_{m+1}$. 因此, $\{x_1,\cdots,x_m\}=\{f(x_{m+1}),f^3(x_{m+1}),\cdots,f^{2m-1}(x_{m+1})\}$. 由此易见 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是 f^2 的 m—周期轨. 同理可证 $\{x_{m+1},\cdots,x_{2m}\}$ 也是 f^2 的 m—周期轨. 证毕.

定理 13.2　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 又设 f 有 2^ln—周期点, 其中 $l\geqslant 0$ 为任意整数, $n>1$ 为任意奇数; 并且对于一切 $m\lhd 2^ln$, f 没有 m—周期点. 则 f 的任意 2^ln-周期轨都是简单周期轨.

证明　对 l 作归纳以证明这一定理. 当 $l=0$ 时本定理的结论

由引理 8.1 给出(本节又重新给予了证明). 假定当 $l\leqslant N(\geqslant 0)$时本定理成立. 下设 $l=N+1$. 令$\{x_1,\cdots,x_{2^{N+1}n}\}$为 f 的 $2^{N+1}n$-周期轨. 根据定理假定,可见 f 没有以大于 1 的奇数为周期的周期点. 应用推论 12.2 可见$\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^N n}\}$和$\{x_{2^N n+1},x_{2^N n+2},\cdots,x_{2^{N+1}n}\}$都是 f^2 的 $2^N n$—周期轨,根据归纳假定可知,它们都是简单周期轨. 因此,根据简单周期轨的定义,$\{x_1,\cdots,x_{2^{N+1}n}\}$是 f 的简单周期轨. 证毕.

定理 13.2 回答了本节开始时所提出的第一个问题,推广了引理 8.2 的结果. 以下研究第二个问题,即对周期点的周期都是 2 的方幂的映射,讨论有关简单周期轨的问题. 最终的结论见定理 13.3.

引理 13.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射.

(1) 如果 f 没有 3-周期点,则 f 的任何 4-周期轨都是简单周期轨.

(2) 如果 f 有 3-周期点,则 f 有一个 8-周期轨不是简单周期轨.

证明 (1)设 f 没有 3-周期点. 令$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$x_1<x_2<x_3<x_4$,是 f 的一个 4-周期轨. 假如 $f(x_3)>x_3$,根据推论 13.1,有 $f^3(x_3)>x_3$. 从而 $f^3(x_3)=f(x_3)=x_4$. 这与$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为 4—周期轨矛盾. 因此 $f(x_3)<x_3$,再据推论 13.1,有 $f^3(x_3)<x_3$. 因此$\{x_1,x_2\}=\{f(x_3),f^3(x_3)\}$是 f^2 的 2-周期轨,它是简单的. 同理$\{x_3,x_4\}=\{f(x_2),f^3(x_2)\}$也是简单的 2-周期轨. 据简单周期轨的定义,$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$是简单的 4-周期轨.

(2)假设 f 有 3—周期点. 令$\{x_1,x_2,x_3\}$,$x_1<x_2<x_3$,是 f 的一个 3-周期轨. 不失一般性,我们假设 $f(x_1)=x_2$,$f(x_1)=x_3$ 及 $f(x_3)=x_1$.(否则,必有 $f(x_3)=x_2$,$f(x_2)=x_1$ 及 $f(x_1)=x_3$. 在这种情形下,所有的证明都是类似的.)(参见图 13.3). 显然,这时我们有

$[x_2,x_3]\supset$. 因此,有 f 的不动点 $e\in(x_2,x_3)$. 又由于 $[x_1,x_2]\leftrightarrows[e,x_3]$,所以有 f 的 2-周期轨 $\{p_1,p_2\}$ 满足条件 $p_1\in(x_1,x_2)$ 及 $p_2\in(e,x_3)$. 令 $I_1=[x_1,p_1]$, $I_2=[p_1,x_2]$, $I_3[x_2,e]$, $I_4=[e,p_2]$ 及 $I_5=[p_2,x_3]$. 我们有

$$I_4\to I_2\to I_5\to I_1\to I_4\to I_3\to I_4\to I_3\to I_4.$$

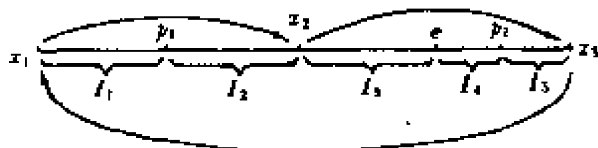


图 13.3

根据引理 7.3,有 $y_0\in I_4$ 使得 $f^8(y_0)=y_0$,并且 $f(y_0)\in I_2$, $f^2(y_0)\in I_5$, $f^3(y_0)\in I_1$, $f^4(y_0)\in I_4$, $f^5(y_0)\in I_3$, $f^6(y_0)\in I_4$, $f^7(y_0)\in I_3$. 容易验证 y_0 是 f 的 8-周期点,并且明显地有

$$f^3(y_0)<f(y_0)<f^5(y_0)\text{ 以及 }f^8(y_0)<f(y_0)<f^7(y_0)$$

显然 f^2 的 4-周期轨 $\{f(y_0),f^3(y_0),f^5(y_0),f^7(y_0)\}$ 不是简单周期轨. 因此,根据简单周期轨的定义,f 的 8-周期轨 $\{y_0,f(y_0),\cdots,f^7(y_0)\}$ 不是简单周期轨. 证毕.

定理 13.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 则 f 的周期点的周期都是 2 的方幂,当且仅当 f 的周期轨都是简单周期轨.

证明 先给出下述结论:对于任意给定的整数 $m>0$,如果线段连续自映射 g 的所有 $2m$—周期轨都是简单周期轨,那么 g^2 的所有 m-周期轨也都是简单周期轨. 因为如果 $\{y_1,\cdots,y_m\}$ 是 g_2 的一个 m—周期轨,则 $\{y_1,\cdots y_m\}\cup\{g(y_1),\cdots,g(y_m)\}$ 便是 g 的简单 $2m$-周期轨,根据简单周期轨的定义,它是 g_2 的两个简单周期轨的并. 易见 $\{y_1,\cdots,y_m\}$ 必是 g_2 的这两个简单周期轨中的一个,所以它也是 g_2 的简单周期轨.

现在假定 f 的周期轨都是简单的. 任意给定整数 $N\geqslant 0$. 重复地应用前一结论,由于 f 的 2^{N+3}-周期轨都是简单周期轨,所以 f^2

的 2^{N+2}-周期轨都是简单周期轨；从而 f^{2^2} 的 2^{N+1}-周期轨都是简单周期轨，…，最后得到 f^{2^N} 的 2^3-周期轨都是简单周期轨. 根据引理 12.1，f^{2^N} 没有 3-周期点，即 f 没有 $2^N 3$ 周期点. 由于 N 是任取的，并根据沙可夫斯基定理，立即可知 f 的周期点的周期都是 2 的方幂. 这证明了定理 13.3 的一半.

为证明定理的另外一半，我们注意，根据推论 13.2 和简单周期轨的定义可知，如果线段连续自映射 g 没有周期点以大于 1 的奇数为周期，则当 g^2 的 m-周期轨都是简单周期轨时，g 的 $2m$-周期轨也都是简单周期轨，其中 $m>0$ 为任意整数. 假如 f 的周期点的周期都是 2 的方幂，则对于任意整数 $N>0$，$f, f^2, \cdots, f^{2^N}$ 的周期点的周期也都是 2 的方幂. 显然，$f^{2^{N+1}}$ 的所有 2-周期轨和 1-周期轨都是简单周期轨. 因此，f^{2^N} 的所有 4-周期轨，2-周期轨和 1-周期轨也都是简单周期轨，$f^{2^{N-1}}$ 的所有 8-周期轨，4-周期轨，2-周期轨和 1-周期轨也都是简单周期轨，…. 循此，经有限步骤之后，可得 f 的 2^{N+2}-周期轨，2^{N+1}-周期轨，…，2-周期轨和 1-周期轨都是简单周期轨. 由于 N 是任取的正整数，所以 f 的所有周期轨都是简单周期轨. 至此，定理证毕.

深入的研究表明，定理 13.2 的结论在很大的程度上可以得到加强. 为了阐述相应的结果，先陈述以下定义：线段连续自映射 f 的简单 $2^l n$-周期轨，其中 $l\geqslant 0$，$n\geqslant 1$ 为奇数，称为 f 的极小 $2^l n$-周期轨，如果将这个周期轨中的 $2^l n$ 个点按实数的通常顺序排列，并记它的（按从小到大的顺序），第 $in+(n+1)/2$ 个点为 C_i，$0\leqslant i\leqslant 2^l-1$，则

$$\{C_0, \cdots C_{2^l-1}\} = \left\{C_{i_0}, f(C_{i_0}), \cdots, f^{2^l-1}(C_{i_0})\right\}$$

对于某一个 $0\leqslant i_0\leqslant 2^l-1$ 成立. 显然，所有简单 2^l-周期轨和所有简单 n-周期轨，其中 $n\geqslant 1$ 为奇数，都是极小周期轨. 图 13.4 中画的

是一个简单的然而并非极小的 6-周期轨的例子. 而图 13.3 中画的那个简单 6-周期轨却恰是一个极小 6-周期轨.



图 13.4

关于极小周期轨的存在性,我们介绍以下两个已知的结果,由于篇幅关系,其证明从略.

定理 13.4　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 又设 f 有 $2^l n$-周期轨,其中 $l\geqslant 0$ 为任意整数,$n\geqslant 1$ 为任意奇数;并且对于一切 $m\lhd 2^l n$,f 没有 m-周期轨. 则当 $2^l n\neq 6$ 时,f 的每一个 $2^l n$-周期轨都是极小周期轨.

定理 13.5　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 若 f 有 k-周期轨,则 f 必有极小 k-周期轨,其中 k 为任意正整数.

附录　关于周期轨及沙可夫斯基序的进一步的研究及有关文献

周期轨道的存在性、稳定性及其结构,是动力系统研究中十分被人关心的课题. 特别是沙可夫斯基定理的发现,使这个方向变得更加活跃起来.

本书第八节所介绍的 Sarkovskii(沙可夫斯基)定理,最早发表于 1964 年[43]. 但在十几年的时间内没有被人们注意到. 1975

年，Li 和 Yorke 在《美国数学月刊》上发表了一篇题为“周期 3 蕴含着混乱”的短文〔44〕，其中证明了沙可夫斯基定理的一个特款（即本书第七节的定理 7.5—若线段上的连续自映射 f 有 3—周期点，则有任意 n-周期点）引起了广泛的兴趣．随后，1977 年，P. Stefan 的文章〔45〕整理和简化了〔43〕的证明，并澄清了一些细节，这才使沙可夫斯基定理广为人知．

有不少作者致力于简化并改进沙可夫斯基定理的证明，并取得了成效．例如：M. Osikawa 与 Y. Oono 的〔46〕，L. Block 等四人合作的〔47〕，Ho C-W.（何崇武）与 G. Morris 的〔48〕，熊金城〔49〕．

本书第九节谈到了单参数的单峰函数族中，周期轨的性质随参数变化而变化的 S 序，以及近年来在数学、物理、生物……等多个学科引人注目的费根堡（Feigenbaum）现象，这方面，除了 M. J. Feigenbaum 的原始文章〔50〕，〔51〕外，还可以参看 P. Collet 等三人的〔52〕，M. Campanino 和 H. Epstein 的〔53〕，O. E. Lanford 的〔54〕．第九节中的定理 9.1，是费根堡现象的一个基本事实．我们的证明是参考了 A. Arneodo 等三人的文章〔55〕而改写的．在 P. Collet 和 J. Eckman 合著的一本讨论单峰函数的迭代的书〔56〕中，可以找到定理 9.1 的另一个证明，但不如我们这里所介绍的易于掌握．对于更一般的 C^1 单参数簇中周期轨的分支现象可参看 L. Block 和 D. Hart 的〔57〕．

本书第十节介绍了线段上的马蹄映射，并且使用了符号动力系的方法．这又是动力系统研究中受到普遍关心的问题之一．但由 Smale 所开始引进的“马蹄”本是二维区域上的自同胚．关于二维及更高维的马蹄，有很多文献可供参看．例如 Z. Nitecki 的〔10〕，张筑生的讲义〔58〕，张景中、杨路所给出的简化处理〔59〕、〔60〕，Moser 给出了二维马蹄存在的一个充分条件〔61〕．

本书第十一节则讨论有关沙可夫斯基定理的一个反问题.讨论中所用到的技巧出于 P. Stefan〔45〕.其中谈到的史迭芬映射则在 Z. Nitecki〔62〕与杨润生〔63〕中都曾论及.另外一个映射,它的动力性质比史迭芬映射更为复杂,然而,它的周期点的周期仍然都是2的方幂,则由 H. Chu(朱辛)和熊金城〔64〕最近给出.

我们在第十二节中讨论了有关沙可夫斯基定理的另外一个侧面—关于周期轨在微小扰动下的稳定性问题.这一节的主要结果属于 L. Block〔65〕.

第十三节中讨论简单周期轨和极小周期轨的存在性问题.一个 n-周期轨 $x,f(x),\cdots,f^{n-1}(x)$ 有着两种自然的顺序,一是按迭代的次数来排,另一是按这些点在区间中的大小来排.这两种顺序的相互关系比较单纯的两种周期轨便是简单周期轨和极小周期轨.简单周期轨的概念最早由 L. Block〔66〕引进;极小周期轨的概念的引进则应归功于 W. Coppel〔67〕和 C. Ho〔68〕.本节中,定理 13.1 属于 T. Li,M. Misiurewicz,G. Pianigiani,和 J. Yorke〔69〕.我们以为用定理 13.1 来证明以后的诸结果是十分方便的.定理 13.2 则属于 W. Coppel〔67〕和 C. Ho〔68〕.定理 13.3 的证明首先是由 L. Block〔66〕给出的.本节最后所介绍的定理 13.4 则是由叶向东〔70〕最近给出.一个较定理 13.4 稍弱的结论早些时候由 L. Block 和 D. Hart [71]得到.与此有关的研究文章还有 J. Llibre 和 A. Re V rentos〔72〕,C. Ho〔73〕和张景中、杨路、章雷〔74〕、〔142〕等等.

众所周知,从拓扑的观点看来,一维流形只有线段与圆周两种.对于圆周 S^1 上的连续自映射而言,有没有类似于沙可夫斯基定理的结果呢?这自然是一个容易想到的问题.关于这个问题的回答,有兴趣的读者可参看 L. Block 等人的〔47〕,〔75〕以及 L. S. Jefremova〔76〕,M. Misiurewicz〔77〕等.

习　　题

7.1　试举出一个这样的[0,1]上的连续函数 $f(x)$：它有 7-周期点，但没有 5-周期点.

7.2　试举出一个这样的[0,1]上的连续函数 $f(x)$：它有 8-周期点，但没有 16-周期点.

试举出[0,1]上这样的连续函数：它有 6-周期点，但对一切大于 1 的奇数 p，$f(x)$没有 p-周期点.

7.3　试举出[0,1]上这样的连续函数：对一切 $n=2^k$，$(k=0,1,2,\cdots)$它有 n 周期点，但对其它的 m，则没有 m-周期点. 进一步问：能不能找到这样的一个单峰函数？能不能找到这样的一个二次函数呢？

7.4　设 $\varphi: M\to M$ 是有限点集 $M\subset R$ 上的一个自映射. $M=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$n\geqslant 3$. 且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$. 若 $\varphi^k(x_1)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$各不相同，试证下列两情形必居其一：

(i)　有 $x_i<x_j\leqslant x_k<x_l$，使

$$\overset{\varphi}{\subset}[x_i,x_j]\overset{\varphi}{\leftrightarrows}[x_k,x_l]\ (\text{或}\ [x_i,x_j]\overset{\varphi}{\leftrightarrows}[x_k,x_l]\overset{\varphi}{\supset})$$

(ii)　有 $x_1<x_k<x_{k+1}<x_n$ $|n-2k|\leqslant 1$，使　$[x_1,x_k]\overset{\varphi}{\leftrightarrows}[x_{k+1},x_n]$

8.5　如果 $f(x)$是 I 上的连续函数，但不一定是自映射，应当如何叙述沙可夫斯基定理呢？

8.6　如果闭线段 I 上的连续函数 $f(x)$的周期点的周期有上界. 则 $f(x)$的周期点集必为闭集. 试证明之.

8.7　设 I 上的连续自映射 $f(x)$有 8-周期点而没有 16-周期点，则 $f(x)$一定有一个 4-周期轨，一个 2-周期轨，一个不动点，它

们之间有如下的顺序关系：

9.8 若 I 上的连续自映射 $f(x)$ 有 $2n$-周期轨，则 f 一定有这样的 $2n$ 周期轨 $x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{2n}$，使得在映射 f 之下 $\{x_1, x_2\cdots, x_n\}$ 恰好变为 $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{2n}\}$，试证明之.

9.9 下列形状的函数方程

$$\begin{cases} g(x) = -\dfrac{1}{\lambda}g(g(-\lambda x)) \\ g(0) = 1, \quad - \leqslant g(x) \leqslant 1, \end{cases}$$

$$(\lambda \in (0,1), x \in [-1,1])$$

叫做费根堡函数方程，其中 $g(x)$ 是未知函数. 若有单峰的连续函数 $g(x)$ 满足上列方程，则 $g(x)$ 有一切 2^k-周期点，但没有任何 $2^k p$-周期点. 这里 $p>1$ 是奇数. 试证明之.

9.10 研究参数族：

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}) \\ 1-\alpha(x-\dfrac{1}{2}) & (\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1) \quad \alpha \in [0,2]) \end{cases}$$

中，$f_\alpha(x)$ 的周期轨当 α 增大时出现的[illegible].

9.11 研究参数族

$$p_t(x) = \begin{cases} 4(x-\dfrac{1}{2})^2 & (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}) \\ t(x-\dfrac{1}{2}) & (\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1) \qquad t \in [0,2] \end{cases}$$

中，$\varphi_t(x)$的周期轨当 t 增大时出现的顺序.

10.12 试计算例 10.1 中之 $\varphi(x)$的 n—周期点的个数.

10.13 试计算例 10.2 中之 $h(x)$的 n—周期点的个数.

10.14 对于例 10.1 中的函数 $\varphi(x)$，试证明下列事实：存在无穷多个这样的 x，使点列$\{\varphi^n(x)\}$在$[0,1]$上稠密.

10.15 对于例 10.2 中的函数 $h(x)$，试证明下列事实：存在无穷多个这样的 x，使$[0,\frac{1}{3}]$、$[\frac{2}{3},1]$上的每个周期点都是点列$\{h^n(x)\}$的极限点.

10.16 求证：对例 10.1 中的 $\varphi(x)$，存在这样的$[0,1]$上的不可数的点集 Q，使得：

(i)对任意的 y_1、$y_2\in Q$，有

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi^n(y_1)-\varphi^n(y_2)|\geqslant\frac{1}{16}$$

$$\liminf_{n\to\infty}|\varphi^n(y_1)-\varphi^n(y_2)|=0$$

(ii)对任意的 $y\in Q$ 和 φ 的任一个 m—周期点 x_0，

$$\limsup_{n\to\infty}|\varphi^n(y)-\varphi^n(x_0)|\geqslant\frac{1}{16}$$

$$\liminf_{n\to\infty}|\varphi^n(y)-\varphi^n(x_0)|=0.$$

10.17 设 f 是线段$[0,1]$上的一个连续自映射. 我们定义线段$[0,1]$上的一个连续自映射的序列 $f^{(0)},f^{(1)},\cdots,f^{(n)},\cdots$如下：$f^{(0)}=f,f^{(1)}=f^*,\cdots,f^{(n)}=(f^{(n-1)})^*,\cdots$，其中 $f^{(n-1)*}$表示$f^{(n-1)}$的史迭芬方根.

证明：对于线段$[0,1]$上任意连续自映射 f，映射序列 $f^{(0)}$，$f^{(1)},f^{(2)},\cdots$都收敛于史迭芬映射 st.

11.18 记 st 为史迭芬映射如常. 证明：

(a)对于每一个 $i=0,1,2,\cdots,st$ 有且仅有一个 2^i-周期轨

(b) st 的周期点集 $P(st)$ 不是闭集

(c) $\overline{P(st)}-P(st)$ 是康托完全集，其中 $\overline{P(st)}$ 为 $P(st)$ 的闭包.（显然(c)蕴含(b)，但(b)的证明容易些.）

(d) 设 $r\in\overline{P(st)}-P(st)$. 则对于任意 $\varepsilon>0$，有整数 $n>0$ 使得 $|st^n(r)-r|<\varepsilon$.

(e) 令 $K=\overline{P(st)}-P(st)$. 则 $st(K)=K$ 并且对于 k 的任意闭子集 K_1，$st(K_1)\subset K_1$ 不成立.

(f) 令 $K=\overline{P(st)}-P(st)$. 则对于任意 $r\in K$，r 的正向轨 $O_T(r)=\{r,st(r),st^2(r),\cdots\}$ 的闭包 $\overline{O_T(r)}$ 恰好等于 K.

(g) 设 $r\in\overline{P(st)}-P(st)$. 则对于任意 $\varepsilon>0$，有整数 $N>0$ 满足下述条件：任给整数 $m>0$. 在从 m 开始的连接着的 N 个数 $m,m+1,\cdots,m+N-1$ 中总有一个数 n_m 使得 $|st^{n_m}(r)-r|<\varepsilon$.

(h) 若 $x\in[0,1]-P(st)$，则序列 $x,st(x),st^2(x),\cdots$ 的任何一个收敛子序列都收敛于 $\overline{P(st)}-P(st)$ 中的点. 因此，如果 $x\in[0,1]$ 满足条件：$x,st(x),st^2(x),\cdots$ 有一个子序列收敛于 x，则 $x\in\overline{P(st)}$.

11.19　设 $\lambda\in(0,1)$，并令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-\lambda)}(2(1-\lambda+(1-\lambda)^{2n})x+\dfrac{1-(1-\lambda)^{2n}}{2-\lambda}) & (x\in[0,\lambda])(n>1)\\ \dfrac{1-x}{1-\lambda} & (x\in[\lambda,1])\end{cases}$$

求证：$g(x)$ 有 $(2n+1)$-周期轨，但没有 $(2n-1)$-周期轨.

第三章　周期点概念的推广

设 S 是 f 的一个周期轨，则 S 中的点在 f 作用下仍变为 S 中的点，而且 S 的每个点都是 S 中某点的像点. 简言之，$f(S)=S$，即 S 是 f 的一个不变子集.

映射的不变子集对动力系统的研究十分重要. 这是因为，在相应的物理过程或其他有实际意义的变化过程中，不变子集中的元素所对应的状态，往往不是那些瞬间消失而不再现的无关紧要的“暂态”，而是人们所关心的所谓非逃逸状态，即恒态.

周期轨只不过是最简单的不变子集. 人们进一步研究了更一般的不变子集：回归点集、ω 极限点集、非游荡点集及链回归点集等. 这些点集之间的关系，以及映射在这些点集上的性态，更深刻地揭示出由映射生成的动力系统的性质.

一般说来，本章内容属于一维动力系统研究中较深入、较专门的部份. 感到困难的读者可以跳过去直接读下一章而不会有任何不便之处.

§14　回归点

所谓某一映射的周期点，乃是经过这个映射作用有限次，仍然返回原处的那种点．如果将上句中"返回原处"这一条件稍微放宽一点，改为"任意接近原处"，便得到了回归点的概念．其精确定义如下：

设 f 是线段 I 上的一个连续自映射．点 $x\in I$ 称为 f 的回归点，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $n>0$ 使得 $|f^n(x)-x|<\varepsilon$．

我们用 $P(f)$ 表示 f 的周期点集，用 $R(f)$ 表示 f 的回归点集．显然，回归点的概念是周期点的概念的推广，也就是

引理 14.1　$P(f)\subset R(f)$．

然而，是否存在着不是周期点的回归点呢？准确些说，是否存在线段连续自映射 f，使得 $P(f)$ 是 $R(f)$ 的真子集呢？让我们回顾一下第二章习题 11.18．在这个习题中，问题(a)说明史迭芬映射 $\mathscr{A}$ 的周期点集是一个可数集，而问题(c)，(d)和(h)则说明 $\mathscr{A}$ 的不是周期点的回归点形成一个康托完全集，也就是说，对于史迭芬映射 $\mathscr{A}$ 而言，回归点要比周期点多得多！

本节还将研究周期点集与回归点集之间进一步的关系．在这之前，先给出几个关于回归点集的重要结论．

引理 14.2　点 x 是线段 I 上的连续自映射 f 的一个回归点当且仅当序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 存在一个收敛于 x 的子序列．

引理 14.2 和下面的引理 14.3 的证明都是容易的，留给读者去完成．

引理 14.3　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 则

$$P(f)=P(f^n),\qquad n=1,2,\cdots.$$

引理 14.3 说明周期点集是"可迭代的". 然而,回归点集是否也是"可迭代的"呢? 回答是肯定的(参见定理 14.1). 但证明却不是显然的了.

定理 14.1　设 f 是线段 I 的一个连续自映射. 则

$$R(f)=R(f^n),n=1,2,\cdots$$

证明　显然,根据定义我们便有 $R(f^n)\subset R(f)$. 以下证明 $R(f)\subset R(f^n)$. 设 $x\in R(f)$. 据引理 12.2,序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 有一个子序列收敛于 x. 设这个序列为 $f^{m_1}(x),f^{m_2}(x),\cdots$. 对于每一个 $i=1,2,\cdots$,令 $m_i=k_in+r_i$,其中 $k_i\geqslant 0,0\leqslant r_i<n$. 由于从 0 到 $n-1$ 中间只有 n 个数,所以序列 $r_1,r_2,\cdots$ 有一个子序列 $r_{p_1},r_{p_2},\cdots$ 和某一个 $0\leqslant r<n$,使得 $r_{p_1}=r_{p_2}=\cdots=r$. 因而序列 $f^{m_1}(x),f^{m_2}(x),\cdots$ 的子序列

$$f^{s_i}(x)\to x\qquad(i\to\infty)$$

其中 $s_i=m_{p_i}=k_{p_i}n+r$. 任给包含 x 的开区间 U_1. 选取 s_{i_1} 使得 $f^{s_{i_1}}(x)\in U_1$. 根据 $f^{s_{i_1}}$ 的连续性,选取包含 x 的开区间 $U_2\subset U_1$,使得 $f^{s_{i_1}}(U_2)\subset U_1$;并选取 s_{i_2} 使得 $f^{s_{i_2}}(x)\in U_2$,……,依次这样作下去,经过有限的 $(n-1)$ 步之后,我们便得到了 n 个包含 x 的开区间 $U_1,U_2,\cdots U_n$ 以及 n 个整数 $s_1,s_2,\cdots,s_n$,它们满足条件:

(1)　$U_1\supset U_2\supset\cdots\supset U_n$;

(2)　$f^{s_{i_j}}(U_{j+1})\subset U_j,j=1,2,\cdots,n-1$;

(3)　$f^{s_{i_j}}(x)\in U_j,j=1,2,\cdots,n$.

这样一来,我们便有

$f^{s_{i_1}+s_{i_2}+\cdots+s_{i_n}}(x)\in U_1$. 注意 $s_{i_1}+s_{i_2}+\cdots+s_{i_n}\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$.

以上表明 $x\in R(f^n)$. 因而 $R(f)\subset R(f^n)$ 获证. 证毕.

前面说过，回归点有可能比周期点多许多，然而回归点与周期点却有着密切的关系．下面的定理表明，每一个回归点的任意邻近都有周期点，也就是说，每一个回归点或者是周期点或者是周期点的聚点．在给出定理 14.2 之前，我们先来证明一个对于研究函数迭代十分有用的引理．

引理 14.4　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，J 是 I 中的一个子区间（无论是开的，闭的或者半开半闭的）．如果 J 中没有 f 的周期点，即 $J\cap P(f)=\varnothing$，那么

（1）　对于任何一个正整数 n，下面两个条件中总有一个成立：

　　$(1)_a$　对于任何 $x\in J$，$f^n(x)>x$.

　　$(1)_b$　对于任何 $x\in J$，$f^n(x)<x$.

（2）　下面两个条件中总有一个成立：

　　$(2)_a$　对于任何正整数 n 和任何 $x\in J$，只要 $f^n(x)\in J$，便有 $f^n(x)>x$.

　　$(2)_b$　对于任何正整数 n 和任何 $x\in J$，只要 $f^n(x)\in J$，便有 $f^n(x)<x$.

证明　（1）　用反证法．假使（1）不成立，那么就有一个正整数 n，使得 $(1)_a$ 和 $(1)_b$ 都不或立．$(1)_a$ 不成立，意味着有一个 $x_1\in J$，使得 $f^n(x_1)\leqslant x_1$；$(1)_b$ 不成立，意味着有一个 $x_2\in J$，使得 $f^n(x_2)\geqslant x_2$．显然，等式 $f^n(x_1)=x_1$ 或 $f^n(x_2)=x_2$ 中如果有一个成立，那么 J 中都有周期点．因此 $f^n(x_1)<x_1$，$f^n(x_2)>x_2$．面这也蕴含着有一个 y 位于 x_1 和 x_2 之间，因此 y 也在 J 中，使得 $f^n(y)=y$．也就是说 J 中有周期点，与假设矛盾．

（2）　用反证法．假设（2）不成立．那么 $(2)_a$ 和 $(2)_b$ 都不成立．$(2)_a$ 不成立，意味着

(A)存在一个正整数 n_1 和一个 $x_1 \in J$，使得 $f^{n_1}(x_1) \in J$ 并且 $f^{n_1}(x_1) \leqslant x_1$.

(2)$_b$ 不成立，则意味着

(B)存在一个正整数 n_2 和一个 $x_2 \in J$，使得 $f^{n_2}(x_2) \in J$ 并且 $f^{n_2}(x_2) \geqslant x_2$.

由于 $f^{n_1}(x_1) = x_1$ 或 $f^{n_2}(x_2) = x_2$，明显地与 J 中没有周期点这一假设矛盾. 所以我们有 $f^{n_1}(x_1) < x_1$ 和 $f^{n_2}(x_2) > x_2$.

由于 $f^{n_1}(x_1) < x_1$，根据本引理结论(1)，我们有：对于任意 $x \in J$，$f^{n_1}(x) < x$. 由于 $f^{n_1}(x_1) \in J$，因此

$$f^{n_1}(f^{n_1}(x_1)) = f^{2n_1}(x_1) < f^{n_1}(x_1) < x_1.$$

再根据本引理结论(1)，可见对于任意 $x \in J$，$f^{2n_1}(x) < x$. 假若我们证明了对于某一正整数 k 和任意 $x \in J$，$f^{kn_1}(x) < x$. 那么由于 $f^{n_1}(x_1) \in J$，我们有

$$f^{(k+1)n_1}(x_1) = f^{kn_1}(f^{n_1}(x)) < f^{n_1}(x) < x_1$$

从而根据本引理结论(1)，对于任意 $x \in J$，$f^{(k+1)n_1}(x) < x$. 因此，根据归纳原则，我们得到结论

(a)对于任意正整数 k 和任意 $x \in J$，$f^{n_1 k}(x) < x$.

通过完全类似的推导，我们又可以得到结论

(b)对于任意正整数 k 和任意 $x \in J$，$f^{n_2 k}(x) > x$.

然而结论(a)和结论(b)是互相矛盾的，因为对于任意 $x \in J$，根据(a)有 $f^{n_1 n_2}(x) < x$；而根据(b)则有 $f^{n_1 n_2}(x) > x$. 这矛盾说明我们的反证假定不对，也就是说本引理中的结论(2)是成立的. 至此，引理 14.4 证毕.

引理 14.4 我们以后还要多次引用. 为了方便起见引进如下术语：设 $J \subset I$ 是一个区间，如果 J 满足引理 14.4 中的条件(2)$_a$，我们则称 J 是(相对于映射 f 而言的)正型区间；如果 J 满足该引理

中的条件$(2)_b$,我们则称 J 是负型区间. 这样一来引理 14.4 可以表述为:没有周期点的区间或者是正型的或者是负型的.

定理 14.2 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 则 f 的每一个回归点或者是周期点或者是周期点的聚点. 从而,$\overline{R(f)}=\overline{P(f)}$. ($\overline{P(f)}$和$\overline{R(f)}$分别为 $P(f)$和 $R(f)$的闭包)

证明 用反证法. 假定 f 的回归点 x 既不是周期点又不是周期点的聚点. 那么,存在着 $\varepsilon>0$,使得 I 中满足条件$|y-x|<\varepsilon$的点 y 都不是周期点. 注意,点集

$$J=\{y\in I\mid |y-x|<\varepsilon\}$$

可能形如$[a,c)$,可能形如$(d,b]$,也可能形如(c,d),其中 a,b 分别是 I 的左右端点. 无论如何,J 是一个区间,在它里面没有周期点. 因而根据引理 14.4,J 或者是正型区间或者是负型区间. 不失一般性假设 J 是正型区间.

根据回归点的定义可知,有一个整数 $n_1>0$ 使得 $f^{n_1}(x)\in J$,由于 J 是正型区间,所以 $x<f^{n_1}(x)$. 令

$$\delta=\min\{|f^1(x)-x|,\cdots,|f^{n_1}(x)-x|\}.$$

$0<\delta<\varepsilon$($\delta\neq0$ 是因为 x 不是周期点.),再根据回归点的定义可知,有整数 $n_2>0$ 使得$|f^{n_2}(x)-x|<\delta$. 根据 δ 的定义,有 $n_2>n_1$,并且 $f^{n_2}(x)<f^{n_1}(x)$. 令 $n=n_2-n_1>0$,$y=f^{n_1}(x)$. 则对于 $y\in J$,我们有 $f^n(y)\in J$,并且 $f^n(y)<y$. 这与 J 是正型区间的假设矛盾. 这就证明了定理 14.2 的第一个结论.

根据已经证明了的这个结论,以及引理 14.1,我们有

$$P(f)\subset R(f)\subset\overline{P(f)}$$

因此

$$\overline{P(f)}=\overline{R(f)}$$

定理证毕.

推论 14.1 设 f 是线段 I 的连续自映射. 如果 f 的周期点集 $P(f)$ 是闭集，那么 f 的回归点集 $R(f)$ 等于周期点集 $P(f)$，从而 $R(f)$ 也是闭集.

证明 由于 $P(f)$ 是闭集，并根据前一定理，我们有

$$P(f) \subset R(f) \subset \overline{P(f)} = P(f)$$

因此 $R(f)=P(f)$. 由此可见 $R(f)$ 也是闭集. 证毕.

推论 14.1 的一个逆命题为：如果映射 f 的回归点都是周期点，那么 f 的周期点集为闭集. 这个逆命题是对的，我们将在后面证明它. 现在我们来指出周期点的周期对周期点集和回归点集的深远影响.

引理 14.5 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 如果 f 有一个 3－周期点，那么 f 的回归点集 $R(f)$ 一定不是闭集；从面，根据推论 13.1，f 的周期点集 $P(f)$ 也不是闭集.

证明 在这个引理的证明中我们将要用到在第七节中出现过的一些记号、技巧和结论.

假设 $\{p_1, p_2, p_3\}$ 是 f 的一个 3－周期轨，$p_1<p_2<p_3$. 以下两种可能性中总有一种成立：(参见图 14.1.)

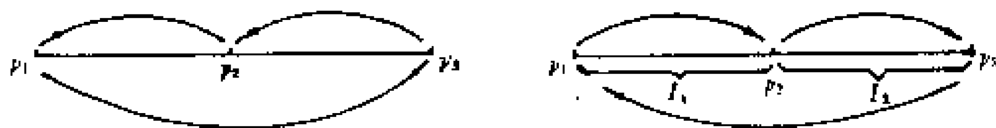


图 14.1

(a) $f(p_1)=p_2, f(p_2)=p_3$，以及 $f(p_3)=p_1$；

(b) $f(p_3)=p_2, f(p_2)=p_1$，以及 $f(p_1)=p_3$.

不失一般性，假设(a)成立. 令 $I_1=[p_1, p_2]$，$I_2=[p_2, p_3]$. 我们有

$$I_1 \leftrightarrows I_2 \supset$$

因此，对于每一个给定的素数 $k>1$，有

$$I_1 \to \underbrace{I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2}_{k-1 个 I_2} \to I_1$$

根据引理 7.3，有 $y_k \in I_1$ 使得 $f^k(y_k)=y_k$，并且对于 $j=1,2,\cdots,k-1$，有 $f^j(y_k)\in I_2$. 因此 y_k 是 f 的 k-周期点. 若令 Y 为所有这些 y_k 构成的集合，则 Y 为可数集，它必有聚点. 令 z 为 Y 的一个聚点. 易见 $z\in I_1$ 是 f 的周期点的聚点，当然也是 f 的回归点的聚点. 为证明引理 14.5 只需证明 z 不是回归点.

设 Y 中，点的序列 $y_{k_1}, y_{k_2}, \cdots$ 收敛于 z. 令 $l\geqslant 1$ 为整数. 由于当 $k_i>l$ 时，有 $f^l(y_{k_i})\in I_2$，以及序列 $f^l(y_{k_1}), f^l(y_{k_2}), \cdots$ 收敛于 $f^l(y)$，所以 $f^l(y)\in I_2$. 假如 $f^l(y)=p_2$，对于某一个 $l\geqslant 0$ 成立，那么 $f^{l+2}(y)=p_1 \notin I_2$，这与前一论断矛盾. 因此，我们有 $y<p_2$ 以及 $f^l(y)>p_2$，$l=1,2,\cdots$. 于是 y 不是 f 的回归点. 引理 14.5 证毕.

定理 14.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 如果 f 的回归点集 $R(f)$ 是闭集或者 f 的周期点集 $P(f)$ 是闭集，那么 f 的每一个周期点的周期都是 2 的方幂，即 $PP(f)\subset N(2^\infty)$.（注意，1 是 2 的 0 次幂.）

证明 用反证法. 假如 f 有一个 n-周期点，其中 n 不是 2 的方幂. 令 $n=2^i s$，其中 $i\geqslant 0$，$s>1$ 为奇数. 根据沙可夫斯基定理，f 有 $(2^{i+1}3)$—周期点. 因此 $f^{2^{i-1}}$ 有 3—周期点. 根据引理 12.5，$R(f^{2^{i+1}})$ 与 $P(f^{2^{i+1}})$ 都不是闭集. 根据引理 12.2 和定理 12.1，$R(f)$ 与 $P(f)$ 都不是闭集. 这与定理的假设矛盾. 证毕.

熟悉拓扑空间理论的读者易于发现，回归点的概念完全可以用拓扑空间的连续自映射来给出. 现陈述如下.

设 X 是一个拓扑空间，f 是 X 上的连续自映射. $x\in X$. 称为映

射 f 的一个回归点，如果对于 x 的任意邻域 U，存在整数 $n>0$ 使得 $f^n(x)\in U$.

如果我们仍记 $P(f)$ 和 $R(f)$ 分别为 f 的周期点集和回归点集，并且当 X 是紧致的度量空间时，引理 14.1、引理 14.2、引理 14.3 和定理 14.1 都是对的，其证明几乎可以逐字逐句的搬用. 然而，引理 14.4，定理 14.2，引理 14.5 和定理 14.3 的证明则强烈地依赖着线段的拓扑性质，因此难以推广.

对于线段连续自映射，由于存在着不动点，所以周期点、回归点的存在都不成问题；然而拓扑空间的自映射不仅可以没有不动点，也可以没有周期点，甚至还可以没有回归点. 例如直线的连续自映射 f，$f(x)=x+1$，就没有回归点，以后将会指出，只要对拓扑空间加上不多的限制，就能保证 X 上的任何一个连续自映射都有回归点.

§15 非游荡点

请读者回顾一下前一节中关于回归点的定义. 如果我们在那个定义中，不要求点 x 本身经过映射的有限次作用，回到自身的任意邻近，而改为要求点 x 的任意邻近都有点经过映射的有限次作用，返回 x 的邻近，那么我们便得到了非游荡点的概念. 这个概念是动力体系（包括映射迭代）中的最重要的概念中的一个，它的精确定义如下.

设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. $x\in I$ 称为 f 的一个非游荡点，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $y\in I$ 和整数 $n>0$ 使得 $|y-x|<\varepsilon$，并且 $|f^n(y)-x|<\varepsilon$. f 的全体非游荡点构成的集合记作 $\Omega(f)$，并称之为 f 的非游荡集. I 中不是 f 的非游荡点的那些点，都叫做 f

的游荡点．因此，x 为 f 的游荡点，当且仅当存在 $\varepsilon>0$，使得凡满足条件 $|y-x|<\varepsilon$ 的点 $y\in I$，对于任意整数 $n>0$ 都有 $|f^n(y)-x|\geq\varepsilon$.

明显地，f 的周期点以及周期点的聚点，都是 f 的非游荡点．因而根据定理 14.2，我们有

引理 15.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射．则

$$P(f)\subset R(f)\subset\overline{P(f)}\subset\Omega(f).$$

是否每一个非游荡点，都在周期点的闭包之中呢？下面的例 15.1 对这个问题给出了否定的回答.

例 15.1　$\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 非空的例子.

在线段 $[0,1]$ 上任取 a,b,c,d 四个点，使得 $0<a<b<c<d<1$. 设 f 是线段 $[0,1]$ 上的任何一个连续自映射，只要求它满足以下条件：

(1)　$a<f(0)<d$, $f(a)=d$, $f(b)>d$, $f(c)=a$, $f(d)=d$ 以及 $f(1)>d$；(2)　f 在 $[0,b]$，$[b,c]$ 和 $[c,1]$ 上都是严格单调的.

映射 f 的图象参见图 15.1. 对于这样的映射 f，我们有 $f([a,1])\subset[a,1]$，因此，$f^2([a,1])\subset[a,1]$，$f^3([a,1])\subset[a,1]$，…；同理，$f([d,1]\subset[d,1]$，$f^2([d,1]\subset[d,1]$，$f^3([d,1])\subset[d,1]$，….

点 a 不是 f 的周期点，因为 $f(a)=d$ 是 f 的不动点．任取 $y\in[0,a)$，则 $f(y)\in(a,1]$；因此，$f^2(y),f^3(y),\cdots\in[a,1]$. 所以 y 不是 f 的周期点．同理 $(a,b]$ 中任何一点也不是 f 的周期点．这表明 a 不在 f 的周期点集的闭包之中，即 $a\notin\overline{P(f)}$.

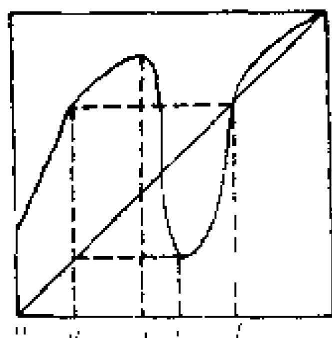


图 15.1

现设 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $f(a-\varepsilon)<d$. 假若 [illegible]，那么，$f^2(a-\varepsilon)<f(a-\varepsilon)$（由于 f 在 $[c,d]$ 上的图象 [illegible] 对角线的下方），

类此，如果对于任何 $n>0$，$f^n(a-\varepsilon)<c$，那么序列 $f(a-\varepsilon)$，$f^2(a-\varepsilon)$，…将是递减序列．它将收敛于 I 中某一个点 z．根据 f 的连续性，这个序列的象序列 $f^2(a-\varepsilon)$，$f^3(a-\varepsilon)$，…应当收敛于 $f(z)$．因此，$z=f(z)$，即 z 为 f 的不动点．然而在 d 的左方 f 只有唯一的一个不动点，它是小于 c 的．以上说明必定有一个 $n>0$ 使得 $f^n(a-\varepsilon)<\varepsilon$．从而，$f^n([a-\varepsilon,a])\supset[c,d]$，并且 $f^{n+1}([a-\varepsilon,a])\supset[a,d]$．因此，存在 $y\in[a-\varepsilon,a]$使得 $f^{n+1}(y)=a$．这就证明了 a 是 f 的一个非游荡点．因此，$a\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$．即 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$非空．

我们既然找到了使 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$至少包含一个点的例子．也就不难找到使 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$包含可数多个点的例子，请读者自己去设法构造满足这一要求的适当的映射．进一步我们要问 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$是否可以是不可数集呢？我们在本节的最后，将对这个问题给予否定的回答．(参见定理 15.3)

现在我们来研究非游荡集的某些重要性质．先介绍两个术语．$K\subset I$ 称为线段 I 上的连续自映射 f 的不变子集，如果 $f(K)\subset K$；$K\subset I$ 称为 f 的强不变子集，如果 $f(K)=K$．易见，如果 $K\subset I$ 是 f 的不变子集(或强不变子集)，那么 K 也是 f^n 的不变子集(或强不变子集)，其中 n 是任意正整数．

引理 15.2 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射．则 f 的非游荡集 $\Omega(f)$是 I 中非空闭集，也是 f 的不变子集．

证明 显然 $\Omega(f)$不是空集，因为线段连续自映射总有不动点，而不动点也是非游荡点．

为了证明 $\Omega(f)$是 I 的闭子集，只要证明 f 的游荡点的集合 $I-\Omega(f)$是 I 的开子集．若 x 是 f 的一个游荡点，则存在 $\varepsilon>0$ 使得对于任意满足条件 $|y-x|<\varepsilon$ 的 $y\in I$ 和任意整数 $n>0$ 都有 $|f^n(y)-x|\geq\varepsilon$．显然，每一个满足条件 $|y-x|<\varepsilon$ 的点 $y\in I$ 都是 f 的游荡

点；因此，$I-\Omega(f)$是开子集.

为证明$\Omega(f)$是f的不变子集，只要证明f的每一个非游荡点x的象点$f(x)$还是f的非游荡点. 设$x\in\Omega(f)$. 任给$\varepsilon>0$. 根据f的连续性，存在$\delta>0$使得当$|y-x|<\delta$时，有$|f(y)-f(x)|<\varepsilon$，由于$x\in\Omega(f)$，我们可以选取$y_1\in I$使得$|y_1-x|<\delta$并且$|f^n(y_1)-x|<\delta$对于某一个整数$n>0$成立. 从而，我们有$f(y_1)\in I$使得$|f(f(y_1))-f(x)|<\varepsilon$以及$|f^n(f(y_1))-f(x)|<\varepsilon$. 这表明$f(x)\in\Omega(f)$. 证毕.

引理 15.3 设f是线段I上的一个连续自映射. 又设$K\subset I$是有限个(开的，闭的，或半开半闭的)区间的并集. 如果对于每一个整数$i\geqslant 0$有$x\in f^i(\overline{K})-f^i(K)$，那么$x$是$f$的周期点. (其中$\overline{K}$为$K$的闭包.)

证明 设$i\geqslant 0$为整数. 根据引理条件，存在$a_i\in\overline{K}-K$使得$f^i(a_i)=x$. 由于K为有限个区间的并集，所以$\overline{K}-K$为有限集. 因此，有$i_1,i_2\geqslant 0, i_1\neq i_2$，使得$a_{i_1}=a_{i_2}$. 设$i_2>i_1$. 则$f^{i_2}(a)=f^{i_1}(a)=x$，其中$a=a_{i_1}=a_{i_2}$. 于是

$$
\begin{aligned}
f^{i_2-i_1}(x) &= f^{i_2-i_1}(f^{i_1}(a)) \\
&= f^{i_2}(a) = x
\end{aligned}
$$

这表明x是f的周期点. 证毕.

引理 15.4 设f是线段I上的一个连续自映射. 若$U\subset I$是一个区间，并且存在着$n>0$使得$f^n(U)\cap U\neq\varnothing$，则$K=f(U)\cup f^2(U)\cup\cdots$为某有限个区间的并集.

证明 由于区间在连续映射下的像集还是区间. 因而$f(U)$，$f^2(U)$，…都是区间. 由于$f^n(U)\cap U\neq\varnothing$，因而对于$i=1,2,\cdots,n$,

$$f^{i+ln}(U)\cap f^{i+(l+1)n}(U)\neq\varnothing, l=1,2,\cdots$$

所以

$$K_i = f^i(U) \cup f^{i+n}(U) \cup f^{i+2n}(U) \cup \cdots$$

是一个区间. 于是 K 是有限个区间 $K_1, K_2, \cdots K_n$ 的并集. 证毕.

* **引理 15.5** 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 则 $x \in I$ 是 f 的一个非游荡点(即 $x \in \Omega(f)$)的充分必要条件是, 对于任何 $\varepsilon > 0$ 和任何整数 $L > 0$, 存在着 $y \in I$ 以及整数 $m > L$, 使得 $|y - x| < \varepsilon$ 并且 $f^m(y) = x$.

换言之, $x \in \Omega(f)$ 当且仅当存在 I 中点的序列 $y_i \to x$ 和正整数序列 $n_i \to \infty$, 使得 $f^{n_i}(y_i) = x, i = 1, 2, \cdots$.

证明 本引理的充分性的证明是显然的. 以下证明必要性.

设 $x \in \Omega(f)$. 当 x 是 f 的周期点时, 引理中的条件显然成立, 因为对于任何 $\varepsilon > 0$ 和任何整数 $L > 0$ 可以选取 $y = x$ 和 $m = Lp$, 其中 p 为 x 的周期, 以下设 x 不是 f 的周期点.

由于 $x \in \Omega(f)$, 根据非游荡点的定义可知, 有 I 中点的序列 $y_i \to x$ 和正整数序列 m_i, 使得 $f^{m_i}(y_i) \to x$. 如果序列 m_i 有一个常值的子序列 $m_{N_i} = \tilde{m}, i = 1, 2, \cdots$, 其中 $\tilde{m}$ 为某一正整数. 那么, $f^{m_{N_i}}(y_i) = f^{\tilde{m}}(y_i) \to x$, 其中 $y_i \to x$. 从而 $f^{\tilde{m}}(x) = x$, 即 x 为 f 的一个周期点, 这与 x 不是 f 的周期点的假定矛盾, 因此, m_i 没有任何常值子序列, 这蕴含着 $m_i \to \infty$.

现在用反证法. 假定存在 $\varepsilon > 0$ 和整数 $L > 0$, 使得对于任意 $y \in I$, $|y-x| < \varepsilon$, 以及任意整数 $m > L$ 都有 $f^m(y) \neq x$, 令

$$U = \{y \in I \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

它是一个区间, 根据反证假定,

$$x \notin K = f^{L+1}(U) \cup f^{L+2}(U) \cup \cdots$$

因此,

$$x \notin f^j(K) = f^{L+j+1}(U) \cup f^{L+j+2}(U) \cup \cdots, j = 1, 2, \cdots.$$

另一方面, 存在整数 $N > 0$ 使得当 $i > N$ 时, $y_i \in U$. 对于任意给定的

整数 $j\geqslant 0$，选取整数 $M>N$ 使得当 $i>M$ 时，$m_i>L+j$. 从而点的序列 $f^{m_{M+1}-j}(y_{M+1}),f^{m_{M+2}-j}(y_{M+2}),\cdots$ 中的每一个点均属于 K. 设这个序列有一个收敛的子序列收敛于点 $a_j\in\overline{K}$（$\overline{K}$ 为 K 的闭包）. 显然，$x=f^j(a_j)\in f^j(\overline{K})$. 以上证明了对于任意整数 $j>0$ 我们都有 $x\in f^j(\overline{K})-f^j(K)$.

由于 x 是 f 的非游荡点，故根据非游荡点的定义可知，存在整数 $n>0$ 使得 $f^n(U)\cap U\neq\varnothing$，从而 $f^{n+L}(U)\cap f^L(U)\neq\varnothing$. 对于 $f^L(U)$ 应用引理 15.4，K 是有限个区间的并集，再根据引理 15.3，x 为 f 的周期点，这与 x 不是周期点的假定矛盾，因此，反证假定不真，即当 $x\in\Omega(f)$ 时，引理中的条件成立. 证毕.

作为引理 15.5 和上节中的引理 14.4 的应用的例子，我们给出下面两个推论.

推论 15.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，a 是线段 I 的一个端点，如果 a 是 f 的非游荡点，即 $a\in\Omega(f)$，则 a 属于 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$.

证明 不失一般性，设 a 是线段 I 的左端点. 这时，对于任意 $\varepsilon>0$，根据引理 15.5，有 $y\in I$，$y-a<\varepsilon$，以及整数 $m>0$ 使得 $f^m(y)=a\leqslant y$. 然而，f^m 是 I 上的自映射，故有 $f^m(a)\geqslant a$. 从而存在 $z\in I$，$a\leqslant z\leqslant y$，使得 $f^m(z)=z$，即 $z\in P(f)$. 这证明了 $a\in\overline{P(f)}$. 证毕.

推论 15.2 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，若 x 是 f 的一个极值点，并且又是 f 的一个非游荡点，则 x 必定属于 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$.（$x\in I$ 称为 f 的极大点（或极小点），如果存在 $\varepsilon>0$，使得当 $y\in I$ 满足条件 $|y-x|<\varepsilon$ 以及 $y\neq x$ 时，有 $f(y)<f(x)$（或 $f(y)>f(x)$）. f 的极大点和极小点都称为 f 的极值点.）

证明 设 $I=[a,b]$. 当 $x=a$ 或 b 时，根据推论 15.1 可知，$x\in\overline{P(f)}$. 下设 $a<x<b$. 不失一般性，假定 x 是 f 的一个极大点，假如 x

$\notin \overline{P(f)}$. 取一个充分小的 $\varepsilon>0$, 使得 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset I$, $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap P(f)=\varnothing$ 并且还满足条件: 对于任意 $y\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$, $y\neq x$, 有 $f(y)<f(x)$, 容易见到, 我们可以选取 $u,v\in I$ 满足条件 $x-\varepsilon<u<x$, $x<v\leqslant x+\varepsilon$, 以及 $f(u)=f(v)$. 因而我们有 $f([u,x])=f([x,v])$, 根据引理 15.5, 存在点 $y\in(u,v)$ 以及整数 $m>1$, 使得 $f^m(y)=x$. 不失一般性, 设 $y\in[u,x]$. 这时, 存在 $z\in[x,v]$ 使得 $f(z)=f(y)$. 因而也有 $f^m(z)=x$. y 和 z 这两点中有一点等于 x 时, 易见 x 便是 f 的周期点, 这与反证假定矛盾, 下设 $y<x$, $x<z$, 然而前者蕴含 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 不是负型区间, 而后者蕴含 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 不是正型区间. 这与引理 14.4 矛盾. 因此, $x\notin\overline{P(f)}$ 的假定不能成立, 即 $x\in\overline{P(f)}$. 证毕.

从现在开始, 我们来给出本节的主要结论.

定理 15.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映时, 又设 x 是 f 的一个非游荡点, 即 $x\in\Omega(f)$. 则对于任意整数 $n>0$, 在 x 与 $f^n(x)$ 之间必有 f 的周期点, 即 $[x;f^n(x)]\cap P(f)\neq\varnothing$. [我们这里用 $[a;b]$ 表示以 a 和 b 为端点的闭区间. 当 $a\leqslant b$ 时, $[a;b]=[a,b]$; 而当 $a\geqslant b$ 时, $[a;b]=[b,a]$.]

证明 用反证法. 假设这个定理的结论不成立, 即存在 $n>0$, 使得 $[x;f^n(x)]\cap P(f)=\varnothing$. 显然, 这时 x, $f^n(x)$ 都不是 f 的周期点, 特别有 $x\neq f^n(x)$. 不失一般性, 设 $x<f^n(x)$. 从而 $f^n(x)<f^{2n}(x)$, 根据引理 14.4, $[x,f^n(x)]$ 一定是正型区间. 因此, 对于任意 $u\in[x,f^n(x)]$ 和任意 $k>0$, 有 $f^k(u)\neq x$. 如果 $f^l(v)=x$ 对于某一个 $v\in[f^n(x),f^{2n}(x)]$ 和某一个整数 $l>0$ 成立, 那么必有 $u\in[x,f^n(x)]$, 使得 $f^n(u)=v$, 于是 $f^{n+l}(u)=x$. 这与前述结论矛盾. 从而, 我们有以下论断: 对于任意 $u\in[x,f^{2n}(x)]$ 和任意整数 $k>0$, 都有 $f^k(u)\neq x$.

由于 $(x,f^{2n}(x))$ 是包含 $f^n(x)$ 的开区间, 并根据 f^n 的连续性,

可以选取 $\varepsilon>0$ 使得当 $y\in I$,并且 $|y-x|<\varepsilon$ 时,有 $f^n(y)\in[x, f^{2n}(x)]$,根据引理 15.5,可令 $z\in I$, $|z-x|<\varepsilon$,和整数 $m>n$ 满足条件 $f^m(z)=x$. 这时,$f^n(z)\in[x,f^{2n}(x)]$,$f^{m-n}(f^n(z))=x$. 这与前段的最后论断矛盾. 证毕.

推论 15.3　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射,如果 x 是 f 的一个非游荡点,即 $x\in\Omega(f)$,则序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 的每一个收敛的子序列都收敛于 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$ 中的点.

这个推论的证明不难通过定理 15.1 得到,我们将它留给读者去完成.

推论 15.4　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射;又设 $x\in I$. 则序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 必有一个收敛的子序列收敛于 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$ 中的点.

证明　任意选取序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 的一个收敛子序列 $f^{m_1}(x),f^{m_2}(x),\cdots$,并设这个收敛子序列收敛于 $y\in I$. 根据非游荡点的定义,容易验证 $y\in\Omega(f)$. 任取序列 $y,f(y),f^2(y),\cdots$ 的一个收敛子序列 $f^{n_1}(y),f^{n_2}(y)\cdots$,并设这个收敛子序列收敛于 $z\in I$. 根据推论 15.3,$z\in\overline{P(f)}$. 对于任意 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$ 使得当 $i>N$ 时,$|f^{n_i}(y)-z|<\varepsilon$. 由于序列 $f^{m_1+n_i}(x),f^{m_2+n_i}(x),\cdots$ 收敛于 $f^{n_i}(y)$,所以有充分大的整数 i 和 j,使得 $|f^{m_j+n_i}(x)-z|<\varepsilon$. 这表明序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 有某一收敛子序列收敛于 $z\in\overline{P(f)}$. 证毕.

或许有的读者要问:推论 15.4 的结论可否改为"序列 $x,f(x)$, $f^2(x),\cdots$ 的每一个收敛的子序列都收敛于 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$ 中的点"? 回答是否定的. 然而构造反例却是件比较麻烦的事,此处就从略了.

推论 15.5　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 如果 x 是 f 的一个非游荡点,但却不在 f 的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$ 之中,

即 $x\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$，则存在 $\varepsilon>0$ 使得对于任何满足条件 $|y-x|<\varepsilon$ 的 f 的非游荡点 y，以及任何正整数 $n>0$ 都有 $|f^n(y)-x|>\varepsilon$.

证明 由于 $x\notin\overline{P(f)}$，我们可以选取到 $\varepsilon>0$ 满足条件：对于任意 $z\in P(f)$，有 $|z-x|>\varepsilon$，这时，如果有一个 $y\in\Omega(f)$，使得 $|y-x|<\varepsilon$，并且 $|f^n(y)-x|<\varepsilon$ 对于某一个整数 $n>0$ 成立. 那么根据定理 15.1，在 y 与 $f^n(y)$ 之间有 f 的某一个周期点 z，显然 $|z-x|<\varepsilon$. 这与 ε 的选取法矛盾. 证毕.

我们现在来阐明推论 15.5 的意义. 在拓扑动力体系这一领域中，当然不仅是研究线段连续自映射的非游荡点. 其实，无需改动本节开头所陈述的非游荡点的定义，对于紧致度量空间的连续自映射仍然有效. (那些尚不熟悉"紧致度量空间"这一术语的读者，完全可以将这一术语在自己心中改换成"线段的闭子集". 这样，对下一段文字就不难理解了). 并且这样做了以后，引理 15.2 对于紧致度量空间的连续自映射仍然成立. (在这个引理中关于非游荡点集非空的证明要作些必要的，然而也并不是很难的变动，而对于其余结论的证明则可完全照搬.)

设 f 是紧致度量空间 X 的一个连续自映射. 根据引理 15.2，f 的非游荡集 $\Omega(f)$，是 x 的一个非空不变闭子集，于是我们可以将 f 限制于 $\Omega(f)$，而得到一个 $\Omega(f)$ 的连续自映射 $f_1=f|\Omega(f)$. 对于映射 f_1 又可以有 f_1 的非游荡集 $\Omega(f_1)$ 和 f_1 在 $\Omega(f_1)$ 上的限制 $f_2=f_1|\Omega(f_1)$，……. 循此法不断地做下去，我们便可以得到一系列映射 $f,f_1,f_2,\cdots$ 和相应的一系列集合 $\Omega(f),\Omega(f_1),\Omega(f_2),\cdots$. 容易证明，如果 $\Omega(f_n)=\Omega(f_{n+1})$，那么就有 $\Omega(f_n)=\Omega(f_{n+1})=\Omega(f_{n+2})=\cdots$. 在这种情形下，这些映射和集合的序列经过有限步骤之后，便稳定下来了. 这时，我们将这一稳定的集合叫做映射 f 的中心，而将最早达到稳定所需要经过的步数叫做这个中心的深度.

对于一般紧致度量空间连续自映射而言，希望它们的中心的深度总是有限数，那是十分不现实的(往往达到稳定的过程是一个超限过程，因而常常要定义某超限数作为映射中心的深度). 有幸的是，对于线段连续自映射而言，根据推论 15.5，我们马上可以写出下面这个定理.

定理 15.2 设 f 为线段连续自映射. 则

$$\Omega(f|\Omega(f)) = \overline{P(f)}.$$

换言之，任意线段连续自映射的中心是这个映射的周期点集的闭包，而中心的深度都不大于 2.

作为本节的结束，我们来研究集合 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 的基数，其中 f 为线段连续自映射. 我们将要证明这个集合是可数集(定理 15.3). 为证明这一点，先来考察一下线段的子集的单边和双边的聚点.

假设 X 是线段 I 的一个子集. X 的聚点的定义如常，也就是说，$y\in I$ 称为是 X 的一个聚点，如果对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $x\in X$，$x\neq y$，使得 $|y-x|<\varepsilon$. 现在给出以下定义：$y\in I$ 称为集合 X 的左聚点(或右聚点)，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $x\in X$，使得 $y-\varepsilon<x<y$(或者，$y<x<y+\varepsilon$). 显然，I 的左端点不能是 X 的左聚点；I 的右端点不能是 X 的右聚点. $y\in I$ 称为 X 的双边聚点，如果 y 既是 X 的左聚点又是 X 的右聚点，$y\in I$ 称为 X 的单边聚点，如果或者 y 是 X 的左聚点而不是 X 的右聚点，或者 y 是 X 的右聚点而不是 X 的左聚点(前者称为单边左聚点，后者称为单边右聚点).

引理 15.6 线段任意子集的单边聚点构成的集合都是可数集.(我们总是把空集，有限集都叫做可数集.)

证明 设 X 是线段 I 的一个子集，分别记 Y_+ 和 Y_- 为 X 的单边右聚点构成的集合和 X 的单边左聚点构成的集合. 对于任意 y

$\in Y_+$，根据定义，存在着某一个 $\varepsilon_y>0$，使得 $(y-\varepsilon_y,y)\cap X=\varnothing$. 显然，对于 $y_1,y_2\in Y_+$，$y_1\neq y_2$，我们有 $(y_1-\varepsilon_{y_1},y_1)\cap(y_2-\varepsilon_{y_2},y_2)=\varnothing$. 由于直线上两两无交的开区间族一定是个可数族，所以 $\{(y-\varepsilon_y,y)\mid y\in Y_+\}$ 是可数集，因此，Y_+ 是可数集，同理，Y_- 也是可数集. 于是 X 的单边聚点构成的集合 $Y_+\cup Y_-$ 是可数集. 证毕.

定理 15.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，则每一个点 $x\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 或者是 $\Omega(f)$ 的单边聚点或者是 $\Omega(f)$ 的孤立点.

因此，集合 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 是可数集.

证明 设 $x\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$. 根据推论 15.1，$x$ 一定不是线段 I 的端点. 因而存在 $a,b\in I$，使得 $a<x<b$，并且 (a,b) 中没有 f 的周期点. 根据引理 14.4，区间 (a,b) 或者是正型区间或者是负型区间.

设 (a,b) 是正型区间，并在此条件下证明 x 必不是 $\Omega(f)$ 的右聚点. 用反证法，假设 x 是 $\Omega(f)$ 的右聚点. 这时，存在着非游荡点的序列 $y_1,y_2,\cdots$ 收敛于 x，并且满足条件 $y_i\in(x,b)$，$i=1,2,\cdots$. 考虑集合

$$K=(x,b)\cup f((x,b))\cup f^2((x,b))\cup\cdots$$

首先，由于 (x,b) 中有 f 的非游荡点，所以存在着某一个整数 $n>0$，使得 $(x,b)\cap f^n((x,b))\neq\varnothing$. 因此，根据引理 15.4，$K$ 是某有限个区间的并集.

其次，对于任何整数 $j>0$，有 $x\notin f^j(K)$. 因为如果 $x\in f^j(K)$ 对于某一个整数 $j>0$ 成立，由于

$$f^j(K)=f^j((x,b))\cup f^{j+1}((x,b))\cup\cdots$$

所以存在着某一个点 $u\in(x,b)$ 和某一个整数 $k>j$，使得 $f^k(u)=x$. 这与 (a,b) 是正型区间的假定相矛盾.

第三，对于每一个 $i>0$ 有 $y_i\in f^j(k)$，$j=1,2,\cdots$. 这是因为根据引理 15.5，存在某一点 $z\in(x,b)$ 和某一个整数 $l>j$，使得 $f^l(z)$

$=y_i$，令 $z^j=f^{i-j}(z)$，显然 $z^j\in K$，因而 $y_i=f^j(z^j)\in f^j(K)$.

最后，根据上述第三项结论可知，对于 $j=1,2,\cdots$ 我们有 $x\in f^j(\overline{K})$，其中 $\overline{K}$ 为 K 的闭包. 这是因为，根据 $y_i\in f^j(K)$，可以选取 $u_i\in k$，使得 $f^j(u_i)=y_i$. 任意选取序列 $u_1,u_2,\cdots$ 的一个收敛的子序列，并设这个收敛子序列收敛于 $u\in\overline{K}$. 那么，我们便有 $x=f^j(u)\in f^j(\overline{K})$.

藉助于以上各项结论并应用引理 15.3 即可得知，x 是 f 的一个周期点. 而这是与假设 $x\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 矛盾，因而 x 是 $\Omega(f)$ 的右聚点的反证假定是错误的.

这样，我们便证明了当 (a,b) 是正型区间时，x 必然不是 $\Omega(f)$ 的右聚点；类似的论证可推得，当 (a,b) 是负型区间时，x 必然不是 $\Omega(f)$ 的左聚点. 因此 x 或者是 $\Omega(f)$ 的孤立点或者是 $\Omega(f)$ 的单边聚点. 众所周知，线段任何子集的孤立点是可数的，再根据引理 15.6，我们便得到了 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 是可数集的结论. 证毕.

§16 映射迭代下的非游荡点

对于给定的线段连续自映射 f，我们定义并研究了它的周期点、回归点和非游荡点. 在第 12 节中，我们已经看到周期点和回归点都是“可迭代”的，这也就是说 f 的周期点集（或回归点集）和它的任意次迭代 f^n 的周期点集（或回归点集）完全相同（参见引理 14.3 和定理 14.1）. 现在我们来考虑非游荡点是否“可迭代”的问题. 对于给定的整数 $n>0$，显然映射 f 的 n 次迭代 f^n 的每一个非游荡点都是 f 的非游荡点，也就是说 $\Omega(f^n)\subset\Omega(f)$. 这只需要根据非游荡点的定义直接可以验证. 问题在于，是否 f 的每一个非游荡

点都是 f^n 的非游荡点. 一般说来，对这个问题的回答是否定的，在下面例 16.1 中我们给出了两个映射，对于这两个映射来说，都有 $\Omega(f)\neq\Omega(f^2)$.

例 16.1　$\Omega(f)\neq\Omega(f^2)$的两个例子.

首先，设线段$[0,1]$的连续自映射 f 如图 16.1，它满足下列条件：

(1)　$f(0)<d, f(a)=d, f(b)=d, f(c)>e, f(d)=d, f(e)=a$ 以及 $f(1)>a$，其中 $0<a<b<c<d<e<1$.

(2)　f 在区间$[a,b]$上是平坦的，也就是说，对于任意 $x\in[a,b]$都有 $f(x)=d$. 此外，f 在区间$[0,a]$，$[b,c]$，$[c,e]$和$[e,1]$上都是严格单调的.

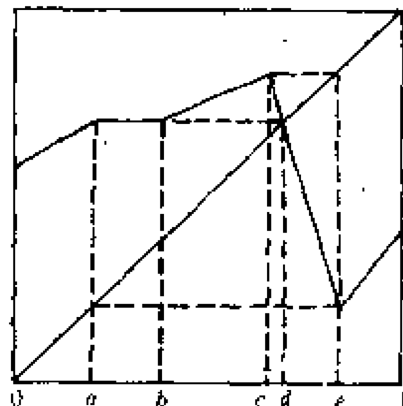


图 16.1

现在来分析点 a 附近的点在映射 f 的迭代下的走向. 我们有下面的结论

(a)　显然，对于$[a,b]$中任何点 x 都有 $f^n(x)=d, n=1,2,\cdots$;

(b)　对于任何充分小的 $\varepsilon>0$，$f((a-\varepsilon,a))$是以 d 为右端点的区间，而 $f^2((a-\varepsilon,a))=f(f((a-\varepsilon,\varepsilon)))$是以 d 为左端点的区间. 一般说来，$f^{2k-1}((a-\varepsilon,a))$是以 d 为右端点的区间，而 $f^{2k}((a-\varepsilon,a))=f(f^{2k-1}((a-\varepsilon,a)))$是以 d 为左端点的区间，$k=1,2,\cdots$. 这个区间的序列 $f((a-\varepsilon,a)), f^2(a-\varepsilon,a)),\cdots$ 中区间的长度会越来越大，直到存在某一个整数 $k>0$，使得 $e\in f^{2k}((a-\varepsilon,a))$，这时，$a\in f^{2k+1}((a-e,a))$，也就是说，存在 $u\in(a-\varepsilon,a)$，使得 $f^{2k+1}(u)=a$. 这说明 a 是 f 的非游荡点，即 $a\in\Omega(f)$.

(c)　明显地，$f([a,d])\subset[d,1]$以及 $f([d,1])\subset[a,d]$. 因此，

$f^{2k-1}([a,d])\subset[d,1]$，从而 $f^{2k}([0,a]\subset[d,1]$，$k=1,2,\cdots$. 这也就是说，对于任何 $u\in[0,a]$，$f^2(u)$，$f^4(u)$，$f^6(u)$，$\cdots$ 中任何一点都不在 a 的附近. 这个事实和(a)中结论结合起来便表明 a 不是 f^2 的非游荡点，即 $a\notin\Omega(f^2)$.

于是我们找到了一个点 $a\in\Omega(f)-\Omega(f^2)$，即上述 f 是使得 $\Omega(f)\neq\Omega(f^2)$ 的例子，

也许有人要问：是否每一个这种例子都会有平坦的部份？这不一定，请读者自行分析一下绘在图 16.2 中的那个没有平坦部份的映射 f. 对于这个映射来说点 a 是它的非游荡点，然而它并不是 f^2 的非游荡点. 这是第二个使得 $\Omega(f)\neq\Omega(f^2)$ 的映射.

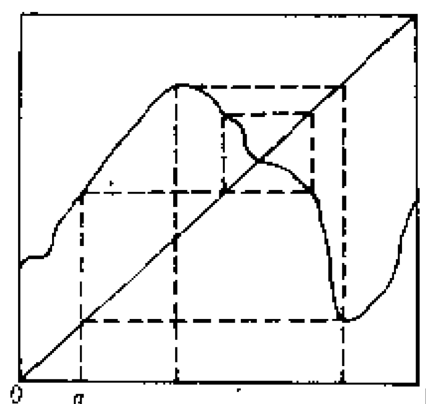


图 16.2

上而介绍的两个例子中，点 $a\in\Omega(f)-\Omega(f^2)$ 有一个共同的特点，那就是它们的象都是周期点. 也就是说它们的正向轨道 $\{a,f(a),f^2(a),\cdots\}$ 都是有限集. 我们可以构造出适当的映射 f，使得 f 有不在它的周期点集的闭包中，然而正向轨道却是无限集的那种非游荡点（做这件事比较麻烦，我们不去作它）. 定理 16.1 将要指出正向轨道为无限集的非游荡点都是“可迭代”的. 另一方而，定理 16.2 将要指出对于任何映射 f 只要 n 是奇数，我们总有 $\Omega(f)=\Omega(f^n)$；而定理 16.3 将要指出对于某一类映射而言，对于任何整数 $n>0$，$\Omega(f)=\Omega(f^n)$ 都成立.

定理 16.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 若 f 的非游荡点 $x\in I$ 的正向轨道是一个无限集，那么对于任意整数 $n>0$，x 都是 f^n 的非游荡点.

定理 16.2 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 若 $n>0$ 是一个奇数,那么 f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 等于 f^n 的非游荡集 $\Omega(f^n)$.

定理 16.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射,若 f 的周期点的周期都是 2 的方幂(1 作为 2 的 0 次幂),那么对于任意整数 $n>0$, f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 都等于 f^n 的非游荡集 $\Omega(f^n)$.

事实上,下述命题 16.1 证明之后,这三个定理便都得到了证明.

命题 16.1 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 如果对于某一个整数 $n>0$, f 有一个非游荡点 $x\in I$,它不是 f^n 的非游荡点,即 $x\in\Omega(f)-\Omega(f^n)$. 那么我们有

(1) x 的正向轨道 $\{x,f(x),f^2(x),\cdots\}$ 是一个有限集;

(2) f 有一个周期点,这个周期点的周期不是 2 的方幂;

(3) n 是一个偶数.

证明 设 $x\in\Omega(f)-\Omega(f^n)$,其中 $n>0$ 是某一个整数,由于 $\overline{P(f)}=\overline{P(f^n)}\subset\Omega(f^n)$,所以 $x\notin\overline{P(f)}$;根据推论 15.1, x 不是线段 I 的端点. 因此,可以选取 $c,d\in I$,使得 $c<x<d$,并且 $U=[c,d]$ 满足条件 $U\cap f^{kn}(U)=\varnothing$, $k=1,2,\cdots$. 特别地, $x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{kn}(U)$. 根据引理 14.4, U 或者是正型区间或者是负型区间. 不失一般性,我们假定 U 是正型区间. 这也就是说,对于任意 $y\in U$ 和任意整数 $k>0$,如果 $f^k(y)\in U$,那么 $y<f^k(y)$. 根据引理 15.5,可以在 U 中选取点的序列 $u_1,u_2,\cdots$ 和正整数序列 $m_1,m_2,\cdots$ 使得当 $k\to\infty$ 时, $u_k\to x$ 和 $m_k\to\infty$,并且这两个序列满足条件 $f^{m_k}(u_k)=x$, $k=1,2,\cdots$. 由于 U 是正型区间,所以 $u_k<x$, $k=1,2,\cdots$.

对于给定的整数 $n>0$,每一个 m_k 可唯一的表为 $m_k=q_kn+r_k$,其中 $q_k\geqslant 0$, $0\leqslant r_k<n$. 从 0 到 n 之间只有有限多个整数,而整数序列 $r_1,r_2,\cdots$ 却有无限项,因而它有一个常值子序列 $r_{N_1}=r_{N_2}=\cdots=$

r，其中 $0 \leqslant r < n$.

从以上所作可见，序列 $u_1, u_2, \cdots$ 的子序列 $v_1 = u_{N_1}, v_2 = u_{N_2}, \cdots$ 和序列 $m_1, m_2, \cdots$ 的子序列 $n_1 = m_{N_1}, n_2 = m_{N_2}, \cdots$ 满足下列条件：

(S1) 当 $k \to \infty$ 时，$v_k \to x$ 和 $n_k \to \infty$；

(S2) $f^{n_k}(v_k) = x, k = 1, 2, \cdots$；

(S3) $v_k \in U$ 并且 $v_k < x, k = 1, 2, \cdots$；

(S4) $n_k = p_k n + r$，其中 $p_k \geqslant 0, 0 \leqslant r < n$.

对于任意整数 $j > 0$，令 y_j 是区间 $f^{n_j}(U)$ 的右端点，我们有

(a) $x < f^{n_j}(x) \leqslant y_j$

由于 $f^{n_j}(x) \in f^{n_j}(U)$，所以 $f^{n_j}(x) \leqslant y_j$；由于 $f^{n_j}(v_j) = x > v_j$ 并且 U 中没有 f 的周期点，所以 $f^{n_j}(x) > x$.

(b) 如果整数 $i > 0$ 满足条件 $n_i < n_j$，则 $x < f^{n_j - n_i}(x) \leqslant y_j$.

由于 $f^{n_j - n_i}(x) = f^{n_j}(v_i) \in f^{n_j}(U)$，所以 $f^{n_j - n_i}(x) \leqslant y_j$. 由于 $f^{n_i}(v_i) = x > v_i$，并且 U 中没有 f 的周期点，所以 $f^{n_j - n_i}(x) = f^{n_j}(v_i) > v_i$. 因为 $v_i < f^{n_j - n_i}(x) \leqslant x$ 将与 U 是正型区间矛盾，所以 $f^{n_j - n_i}(x) > x$.

(c) 设 $m > 0$ 为整数，$m = 2r \pmod n$. 则对于所有充分大的整数 $k > 0$，$f^m(v_k) \notin f^{n_j}(V)$.

由于 $n_k \to \infty$，故有整数 $M > 0$ 使得当 $k > M$ 时，$n_k > m$. 如果有某一个 $k > M$，使得 $f^m(v_k) \notin f^{n_j}(U)$，即存在 $v \in U$，使得 $f^m(v_k) = f^{n_j}(u)$，那么我们便有

$$
\begin{aligned}
x &= f^{n_k}(v_k) \\
&= f^{n_k - m}(f^m(v_k)) \\
&= f^{n_k - m + n_j}(v),
\end{aligned}
$$

其中 $n_k - m + n_j \equiv 0 \pmod n$. 这与 $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{n_k}(U)$ 矛盾.

(d) 如果存在 $z \in [x, y_j]$ 使得 $f^m(z) \in [x, y_j]$，其中 $m > 0$ 为任一整数，$m \equiv r \pmod n$，则 $f^{m + n_j}(x) \geqslant y_j$.

因此，当 $n_i<n_j$ 时，$f^{n_j+n_i}(x)\geqslant y_j$.（因为根据 (a) 与 (b) 我们有 $f^{n_j-n_i}(x)\in[x,y_j]$ 以及 $f^{n_i}(f^{n_j-n_i}(x))=f^{n_j}(x)\in[x,y_j]$.）

为证明 (d)，设对于某 $z\in[x,y_j]$ 和某整数 $m>0$，我们有 $f^m(z)\in[x,y_j]$. 这时，存在 $v\in U$ 使得 $f^{n_j}(v)=z$，从而 $f^{m+n_j}(v)=f^m(z)>v$. 由于 U 中没有 f 的周期点，所以 $f^{m+n_j}(x)>x$. 如果 $f^{m+n_j}(x)<y_j$，则由于 $f^{m+n_j}(x)\in(x,y_j)\subset f^{n_j}(U)$ 而导致 $f^{m+n_j}(u_k)\in(x,y_j)$ 对于一切充分大的整数 $k>0$ 成立. 然而这与 (c) 矛盾，因为 $m+n_j\equiv 2r\ (\mathrm{mod}\ n)$.

(e)　设 $m>0$ 为整数，$m\equiv r\ (\mathrm{mod}\ n)$. 则对于任意 $z\in[x,y_j]$，$f^m(z)\neq x$.

为证明 (e) 我们用反证法. 设 $z\in[x,y_j]$ 使得 $f^m(z)=x$. 这时，据 (d) 我们有 $f^m(f^{n_j}(x))=f^{m+n_j}(x)\geqslant y_j$，其中 $f^{n_j}(x)\in[x,y_j]$. 因此，

$$f^m([x,y_j])\supset[x,y_j]$$

从而有

$$f^{2m}([x,y_j])\supset f^m([x,y_j])\supset[x,y_j]$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)m}([x,y_j])\supset f^{(n-2)m}([x,y_j])\supset\cdots\supset[x,y_j]$$

于是 $x\in f^{(n-1)m}([x,y_j])\subset f^{(n-1)m+n_j}(U)$，其中 $(n-1)m+n_j\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n)$. 这与 $x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}(U)$ 矛盾.

(f)　若 $n_i<n_j<n_l$，则

$$y_l=f^{n_l-n_i}(x)=f^{n_l-n_j}(x)=f^{n_j-n_i}(x)=y_j$$

从而 y_j 是 $f^{n_l-n_j}$ 的不动点.（因为 $f^{n_l-n_j}(y_j)=f^{n_l-n_j}(f^{n_j-n_i}(x))=f^{n_l-n_i}(x)=y_j$.）

因为 $f^{n_l-n_i}(x)$，$f^{n_l-n_j}(x)$ 和 $f^{n_j-n_i}(x)$ 中的任何一个都既不是 $[x,y_j]$ 的内点也不是 $[x,y_l]$ 的内点. 例如我们证明 $f^{n_l-n_j}(x)$ 不是 $[x,y_j]$ 的内点. 因为假如 $x<f^{n_l-n_j}(x)<y_j$，那么对于所有充分大的整数 k

>0 便有 $f^{n_l-n_j}(v_k)\in[x,y_j]$，然而 $f^{n_k-n_l+n_j}(f^{n_l-n_j}(v_k))=f^{n_k}(v_k)=x$，其中 $n_k-n_l+n_j\equiv r(\mathrm{mod}\ n)$. 这与$(e)$矛盾，其他的证明类此. 因此 $f^{n_l-n_i}(x)$和 $f^{n_l-n_j}(x)$应当是$[x,y_l]$的端点，即

$$y_l=f^{n_l-n_i}(x)=f^{n_l-n_j}(x)$$

同理，

$$y_j=f^{n_j-n_i}(x)$$

根据前而所说，$y_j>x$ 不能是$[x,y_l]$的内点，$y_l>x$ 也不能是$[x,y_j]$的内点，所以 $y_l=y_j$. 这就证明了(f).

我们现在来证明命题 16.1 的三个结论.

(1)的证明：从(f)即可看出在 x 的正向轨道$\{x,f(x),f^2(x),\cdots\}$中有周期点 $f^{n_j-n_i}(x)$，因此 x 的正向轨道是有限集.

(2)的证明：我们取定 n_i 和 n_j，$n_i<n_j$. 由于 $f^{n_j}(x)>x$，所以我们可以选取一个充分大的整数 $k>0$，使得 $f^{n_j}(u_k)>x$. 显然 $f^{n_j}(u_k)\in f^{n_j}(U)$. 因此，$x<f^{n_j}(u_k)<y_j=f^{n_j-n_i}(x)$ ($f^{n_j}(u_k)\neq y_j$，若不然将导致 x 是周期点.). 由于 k 选得充分大，我们假设 $n_k>n_j$. 令 $g=f^{n_k-n_j}$，$z=f^{n_j}(u_k)$. 因此，$g(z)=x$. 根据(f)，我们有 $g(y_j)=y_j$ 以及 $g(x)=y_j$. 易见，存在 $z'\in[z,y_j]$使得 $g(z')=z$，从而我们有

$$\overset{g}{\circlearrowleft}[x,z]\underset{g}{\overset{g}{\rightleftarrows}}[z,z']$$

(符号的意义详见第七节). 根据定理 7.6，g 有 3-周期点. 容易见到 g 的这个 3-周期点也是 f 的周期点，并且它对 f 而言的周期一定不是 2 的方幂.

(3)的证明：取定 n_i 和 n_j，$n_i<n_j$.

由于 $f^{n_j-n_i}(v_k)\to f^{n_j-n_i}(x)=y_j$，所以对于所有充分大的 $k>0$，有 $f^{n_j-n_i}(v_k)>x$. 然而 $f^{n_k-n_j+n_i}(f^{n_j-n_i}(v_k))=f^{n_k}(v_k)=x$，其中 $n_k-n_j-n_i\equiv r(\mathrm{mod}\ n)$. 再根据$(e)$，我们有 $f^{n_j-n_i}(v_k)>y_j$.

根据(a)和(d)，我们有 $f^{n_j}(x)>x$ 和 $f^{n_j+n_k}(x)\geqslant y_j>x$. 从而可以选取一个充分大的 $k_1>0$，使得 $f^{n_j}(v_{k_1})>x$ 以及 $f^{n_j+n_k}(v_{k_1})>x$. 因为 $f^{n_j}(v_k)\in f^{n_j}(U)$，所以 $f^{n_j}(v_{k_1})\in[x,y_j]$. 再根据$(c)$，$f^{n_j+n_k}(v_{k_1})\notin f^{n_j}(U)$，从而 $f^{n_k}(f^{n_j}(v_k))=f^{n_k+n_j}(v_k)>y_j$. 另一方面，对于 $f^{n_j-n_k}(x)\in[x,y_j]$，有 $f^{n_k}(f^{n_j-n_k}(x))=f^{n_j}(x)\in[x,y_j]$. 从而我们得到 $f^{n_k}([x,y_j])\supset[y_j,f^{n_j+n_k}(v_k)]$.

根据(3)的证明中第一段的结论，可以选取足够大的 $k_2>0$ 使得 $f^{n_j-n_k}(v_{k_2})\in[y_j,f^{n_j+n_k}(v_{k_1})]$. 再根据前段的结论可见，存在 $\omega\in[x,y_j]$使得 $f^{n_k}(\omega)=f^{n_j-n_k}(v_{k_2})$. 于是 $f^{n_{k_2}-n_j+2n_k}(\omega)=x$. 另一方面，对于 $f^{n_j-n_k}(x)\in[x,y_j]$有 $f^{m}(f^{n_j-n_k}(x))=f^{n_{k_2}+n_k}(x)\geqslant y_j$，其中 $m=n_{k_2}-n_j+2n_k\equiv 2r\pmod n$. 这样一来便得到了

$$f^{m}([x,y_j])\supset[x,y_j]$$

从而我们有

$$f^{2m}([x,y_j])\supset f^{m}([x,y_j])\supset[x,y_j]$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{pm}([x,y_j])\supset f^{(p-1)m}([x,y_j])\supset\cdots\supset[x,y_j]$$

其中 $p>0$ 为任意整数.

假如 $n>0$ 是一个奇数，设 $n=2p+1$. 这时，我们便有 $x\in f^{pm}([x,y_j])\subset f^{pm+n_k}(U)$，其中 $pm+n_k\equiv 0\pmod n$. 这与 $x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{nk}(U)$矛盾. 这就证明了 n 必是偶数.

命题 16.1 至此全部证完，并且定理 16.1，定理 16.2 和定理 16.3 也都随之而获证明.

根据定理 16.2，对于每一个线段连续自映射 f，我们有

$$\Omega(f)=\Omega(f^3)=\Omega(f^5)=\cdots=\Omega(f^{2k+1})=\cdots$$

对于映射 f^2 应用这一结果便有

$$\Omega(f^2)=\Omega(f^6)=\Omega(f^{10})=\cdots\Omega(f^{2(2k+1)})=\cdots.$$

一般地说，对于任意整数 $N>0$，

$$\Omega(f^{2^N})=\Omega(f^{2^N\cdot 3})=\Omega(f^{2^N\cdot 5})=\cdots=\Omega(f^{2^N(2k+1)})=\cdots.$$

因此，非游荡集 $\Omega(f)$，$\Omega(f^2)$，$\Omega(f^3)$，…，$\Omega(f^n)$，…中的每一个都要等于下述非游荡集中的某一个：

$$\Omega(f)\supset\Omega(f^2)\supset\Omega(f^4)\supset\cdots\Omega(f^{2^N})\supset\cdots \qquad (16.1)$$

在例 16.1 中我们给出了两个例子，说明 $\Omega(f^2)$ 可以是 $\Omega(f)$ 的真子集，更为有趣的是，对于任意给定的由等号"="和不等号"≠"组成的序列，我们都可以找到适当的线段连续自映射 f，使得将这个由等号和不等号组成的序列中的"="和"≠"挨次代换关系式(16.1)中的那一串包含关系"⊃"之后，所得到的相应关系式仍然成立. 由于篇幅的缘故. 我们不再讨论这件事.

§ 17　ω- 极限点

我们现在来引进一个介于非游荡点与回归点之间的概念——ω- 极限点的概念. 点 $y\in I$ 称为点 $x\in I$ 的相对子线段 I 上的连续自映射 f 而言的一个 ω- 极限点，如果序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 有一个收敛的子序列 $f^{n_1}(x),f^{n_2}(x),\cdots$ 收敛于点 y. 点 $x\in I$ 的相对于映射 f 而言的全体 ω- 极限点构成的集合记为 $\omega(x,f)$，令 $W(f)=\bigcup_{x\in I}\omega(x,f)$ 并称之为映射 f 的 ω- 极限集. $W(f)$ 中的每一个点我们都称为 f 的 ω- 极限点.

ω- 极限点的概念在映射迭代的研究中是一个十分重要的概念. 如果我们把 I 中的点看成是客观事物的状态（如位置，速度，温度等等）而将映射 f 看成是在某种背景（如力场，温度场等等）下状态变换的规律，那么点 y 是点 x 的一个 ω- 极限点的含义便是状态

y 是初始状态 x 在变换 f 的作用下所能达到的一个极限情形，或者说一个最终的结果. 研究这种"最终的结果"对于研究具体问题来说当然是很要紧的事. 前面谈到过的回归点便是一类特殊的 ω- 极限点，这是因为 x 为 f 的回归点当且仅当 $x\in\omega(x,f)$. 在这一节中，我们将对 ω- 极限集本身以及它与非游荡集之间的关系详加研究.

引理 17.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，又设 $x\in I$. 则

(1)　x 的 ω- 极限集 $\omega(x,f)$ 是 I 的非空闭子集，并且相对于 f 而言是强不变的；

(2)　对于每一个整数 $n>0$，$f(\omega(x,f^n))=\omega(f(x),f^n)$；

(3)　对于每一个整数 $n>0$，$\omega(x,f)=\bigcup_{i=1}^{n}\omega(f^i(x),f^n)$.

这一引理的证明可直接从定义得到，留给读者完成.

推论 17.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，则对于每一个整数 $n>0$，$\omega(f)=\omega(f^n)$. 换言之，映射的 ω- 极限集是可迭代的.

证明　设 $x\in I$. 显然 $\omega(x,f^n)\subset\omega(x,f)$. 因此，$w(f^n)\subset\omega(f)$. 另一方面，据引理 17.1 的(3)，$\omega(x,f)=\bigcup_{i=1}^{n}\omega(f^i(x),f^n)\subset\omega(f^n)$. 因此，$\omega(f)\subset\omega(f^n)$.

引理 17.2　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，又设 $x\in I$. 若 x 的 ω- 极限集 $\omega(x,f)$ 中有一个 f 的不动点 p，并且 p 是 $\omega(x,f)$ 的孤立点，则 $\omega(x,f)=\{p\}$.

证明　假定引理不成立. 我们首先选取一个充分小的 $\varepsilon>0$，使得对于 $\omega(x,f)$ 中任意异于 p 的点 y，都有 $|y-p|>\varepsilon$，即 $U\cap\omega(x,f)=\{p\}$，其中 $U=(p-\varepsilon,p+\varepsilon)\cap I$ 为 I 中开集. 现在来定义一个整数序列 $N_1,N_2,\cdots$ 如下：

$$N_1=\min\{n:f^n(x)\in U\}$$

$$\cdots\cdots$$

$$N_k=\min\{n>N_{k-1}:f^n(x)\in U\}$$

$$\cdots\cdots$$

易见，序列 $f^{N_1}(x),f^{N_2}(x),\cdots$ 收敛于 p，然后定义另一个整数序列 $M_1,M_2,\cdots$ 如下：

$$M_1=\min\{N_i:f^{N_i+1}(x)\notin U\}$$

$$\cdots\cdots$$

$$M_k=\min\{N_i>M_{k-1}:f^{N_i+1}(x)\notin U\}$$

$$\cdots\cdots$$

由于 x 有异于 p 的 ω- 极限点，并且它不在 U 中，以上定义方式是合理的. 然而这样一来，一方面显然 $f^{M_1}(x),f^{M_2}(x),\cdots$ 应当收敛于 p，而另一方面 $f^{M_1+1}(x),f^{M_2+1}(x),\cdots$ 却必不收敛于 p. 这一事实与 f 的连续性矛盾. 引理证毕.

定理 17.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，又设 $x\in I$. 则 x 的 ω- 极限集 $\omega(x,f)$ 为有限集当且仅当它是 f 的一个周期轨.

证明　显然，若 $\omega(x,f)$ 为 f 的一个周期轨，则它必为有限集，现设 $\omega(x,f)$ 为有限集，根据引理 17.1 可知，$\omega(x,f)$ 的每一个点都是周期点. 令 $p\in\omega(x,f)$ 并设 p 的周期为 n. 根据引理 17.1 的(3)，对于某一整数 i，$1\leqslant i<n$，有 $p\in\omega(f^i(x),f^n)$. 由于 p 是 f^n 的不动点，并且 $\omega(f^i(x),f^n)\subset\omega(x,f)$ 也是有限集，因此根据引理 17.2，有 $\omega(f^i(x),f^n)=\{p\}$. 由引理 17.1 的(2)可知，对于每一个 $j>0$，$\omega(f^j(x),f^n)$ 仅由 p 的周期轨中的某一个点组成. 因此再根据引理 17.1 的(3)，$\omega(x,f)$ 包含于 p 的周期轨之中，然而 $\omega(x,f)$ 是 f 的强不变子集，因而 $\omega(x,f)$ 恰是 p 的周期轨. 证毕.

引理 17.3　设 f 是线段 $I=[a,b]$ 上的一个连续自映射. 又设 $x\in I$. 若下述条件 (a) 与 (b) 之一被满足，则 x 是 f 的一个 ω 极限点，即 $x\in\omega(f)$.

(a) $x \neq a$ 并且对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 $a \leqslant x - \varepsilon$，则存在 $\delta > 0$ 和 $m > 0$，使得 $f^m([x-\varepsilon, x]) \supset [x-\delta, x]$

(b) $x \neq b$ 并且对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 $x+\varepsilon \leqslant b$，则存在 $\delta > 0$ 和 $m > 0$ 使得 $f^m([x, x+\varepsilon]) \supset [x, x+\delta]$.

证明 不失一般性，我们证明当条件(a)满足时，$x \in \omega(f)$. 此时，任意取定 $\varepsilon > 0$，使得 $a \leqslant x - \varepsilon$. 并根据条件(a)选取 $\varepsilon_1, 1 > \varepsilon_1 > 0$，以及 $m_1 > 0$ 使得 $f^{m_1}([x-\varepsilon, x]) \supset [x-\varepsilon_1, x]$. 再根据条件(a)，对于 $\varepsilon_1 > 0$ 又可以选取 $\varepsilon_2, \frac{1}{2} > \varepsilon_2 > 0$，以及 $m_2 > 0$ 使得 $f^{m_2}([x-\varepsilon_1, x]) \supset [x-\varepsilon_2, x]$. 继续这一作法，根据归纳原理，我们可以选得一系列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 其中 $\frac{1}{n} > \varepsilon_n > 0$，以及一系列正整数 $m_1, m_2, \cdots$ 使得 $f^{m_n}([x-\varepsilon_{n-1}, x]) \supset [x-\varepsilon_n, x]$, $n = 1, 2, \cdots$. (其中 $\varepsilon_0 = \varepsilon$.)令

$$F_0 = [x - \varepsilon_0, x]$$

$$F_1 = F_0 \cap f^{-k_1}([x-\varepsilon_1, x])$$

$$\cdots\cdots$$

$$F_n = F_{n-1} \cap f^{-k_n}([x-\varepsilon_n, x])$$

$$\cdots\cdots$$

其中 $k_n = \Sigma_{j=1}^n m_j$. 容易验证每一个 F_n 都是非空闭集，并且

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

因此，$F = F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap \cdots \neq \varnothing$，任取 $z \in F$，我们有

$$f^{k_n}(z) \in [x - \varepsilon_n, x], \qquad n = 1, 2, \cdots$$

因此，$x \in \omega(z, f) \subset \omega(f)$. 证毕.

引理 17.4 设 f 是线段 $I = [a, b]$ 上的一个连续自映射. 又设 $x \in I$. 若下述条件(a)与(b)之一被满足，则 x 是 f 的一个 ω 极限点，即 $x \in \omega(f)$.

(a) $x \neq a$ 并且对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 $a \leqslant x - \varepsilon$，则存在点

$y\in(x-\varepsilon,x)$和$m>0$,使得$f^m(y)\in(x-\varepsilon,x)$.

(b) $x\neq b$并且对于任意$\varepsilon>0$,只要$x+\varepsilon\leqslant b$,则存在点

$y\in(x,x+\varepsilon)$和$m>0$,使得$f^m(y)\in(x,x+\varepsilon)$.

证明 不失一般性,我们假定条件(a)成立,并证明此时有$x\in W(f)$.任意给定$\varepsilon>0$使得$a\leqslant x-\varepsilon$.根据条件(a),我们能在$(x-\varepsilon,x)$中找到一个收敛于x的序列$y_1,y_2,\cdots$以及一个正整数序列$m_1,m_2,\cdots$,使得$f^{m_i}(y_i)\in(x-\varepsilon,x)$,并且$f^{m_1}(y_1),f^{m_2}(y_2),\cdots$收敛于$x$.如果序列$m_1,m_2,\cdots$中有一个常值子序列,设为$m_{j_1},m_{j_2},\cdots$,其中,$m_{j_i}=m$.则由$y_{j_i}\to x$和$f^m(y_{j_i})\to x$可知$x$为$f$为周期点.因此,显然有$x\in\omega(f)$,下设序列$m_i$没有常值子序列,因而$m_i\to\infty$.考虑集合

$$K=f([x-\varepsilon,x])\cup f^2([x-\varepsilon,x])\cup\cdots$$

显然K是f的不变闭子集,并且K可表为有限个区间的并集,因此$\overline{K}-K$为有限集.设$n>0$为任意整数.取$N>0$使得当$i>N$时,$m_i>n$.这时,$f^{m_{N+1}-n}(y_{N+1}),f^{m_{N+2}-n}(y_{N+2}),\cdots$为$K$中序列.任取这个序列的一个收敛子序列,并设其收敛于z_n.易见$z_n\in\overline{K}$,并且$f^n(z_n)=x$.若$z_1,z_2,\cdots$中有无限多个属于$\overline{K}-K$,由于$\overline{K}-K$为有限集,因而必有$z_k=z_l,k>l$.这时,我们有

$$f^{k-l}(x)=f^{k-l}(f^l(z_l))=x$$

即x为f的周期点,从而有$x\in\omega(f)$.下设$z_1,z_2,\cdots$中除去有限多个之外均属于K,这时,必有某一个m_i使得$z_i\in K$.于是$f^{m_i}([x-\varepsilon,x])\supset[f^{m_i}(y_i),x]\supset[x-\delta,x]$对于某一个$\delta>0$成立.我们已经推得在这种情形下引理17.3中的条件(a)成立.根据引理17.3可知,$x\in\omega(f)$.证毕.

定理17.2 设f是线段I上的一个连续自映射,则f的非游荡集$\Omega(f)$的任意聚点,都是f的ω-极限点.

因此,f的ω-极限集$\omega(f)$是I的闭子集,并且$\omega(f)$包含着f

的周期点集 $P(f)$ 的闭包 $\overline{P(f)}$.

根据引理 17.4，容易证明这个定理，请读者自行完成.

定理 17.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射，则有

$$\omega(f) = \Omega(f) \cap f(\Omega(f)) \cap f^2(\Omega(f)) \cap \cdots$$

证明 显然，$\omega(f) \subset \Omega(f)$. 由于 $\omega(f)$ 是 f 的强不变子集（参见引理 17.1），故 $f^n(\omega(f)) = \omega(f) \subset f^n(\Omega(f))$. 因此

$$\omega(f) \subset \Omega(f) \cap f(\Omega(f) \cap f^2(\Omega(f)) \cap \cdots$$

现设 $x \in \Omega(f) \cap f(\Omega(f)) \cap f^2(\Omega(f)) \cap \cdots$. 因而对于每一个 $n > 0$ 存在 $y_n \in \Omega(f)$，使得 $f^n(y_n) = x$. 假定 $x \notin \omega(f)$. 这时 $x \notin \overline{P(f)}$（参见定理 17.2），并且 x 也不是 I 的端点（参见推论 15.1）. 因此，我们可以选取 $c, d \in I$，使得 $x \in (c,d)$，并且 $(c,d) \cap P(f) = \varnothing$. 根据引理 14.4，不失一般性，可设 (c,d) 为正型区间. 由于 $x \notin \omega(f)$，根据引理 17.4，我们可以选取 c 满足条件：对于任意 $z \in (c,x)$ 和任意整数 $m > 0$ 都有 $f^m(z) \notin (c,x)$，令

$$K = (c,d) \cup f((c,d)) \cup f^2((c,d)) \cup \cdots$$

我们指出：

(1) 由于 $x \in (c,d)$ 是非游荡点，易见 K 和 $f(K)$ 都可表为有限个区间的并集. 因此，$f(K)$ 的边界点只有有限多个；

(2) K 和 $f(K)$ 都是 f 的不变子集. 因此 $\overline{K}$ 和 $\overline{f(K)}$ 也都是 f 的不变子集；

(3) 根据前面 c 的选取，$(c,x) \cap f(K) = \varnothing$；

(4) 根据引理 15.5，$x \in f(K)$；

(5) 根据定理 15.1，对于任意 $n > 0$，$y_n \notin [c,d]$；

(6) 对于任意 $n > 0$，$y_n \in \overline{f(K)}$.

为证明(6)，根据(5)，我们只需证明 $y_n \in \overline{K}$. 用反证法，设 $y_n \notin \overline{K}$ 对于某一个 $n > 0$ 成立. 选取 $\varepsilon > 0$，使得对于 $z \in I$，$|z - y_n| < \varepsilon$，有

$f^n(z)\in(c,d)$. 根据(4)，对于任何 $m>n$ 和任何 $z\in I$，$|z-y_n|<\varepsilon$，我们有 $f^m(z)\in\overline{K}$，从而 $f^m(z)\neq y_n$. 这与 $y_n\in\Omega(f)$ 矛盾(参见引理 15.5). 这说明(6)成立.

现在来引出我们所需要的矛盾. 假如 $y_1, y_2, \cdots$ 都是 $f(K)$ 的边界点，由(1)知 $f(K)$ 只有有限个边界点. 故有 $n_1>n_2$ 使 $y_{n_1}=y_{n_2}$. 这样，$f^{n_2-n_1}(x)=f^{n_2-n_1}(f^{n_1}(y_{n_1}))=x$，即 x 为 f 的周期点. 根据我们开头的假定，这是不可能的. 因而至少有某一个 y_n 是 $f(K)$ 的内点. 由于 $f^n(y_n)=x$，可选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subset f(K)$，并且 $f^n((x-\varepsilon,x+\varepsilon))\subset(c,d)$. 根据(2)和(3)可知，$f^n((x-\varepsilon,x+\varepsilon))\subset[c,d)$. 根据引理 15.5，可以选取 $u\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ 以及 $M>0$，使得 $f^M(u)=y_n$. 令 $v=f^n(u)\in[x,d)$，则有 $f^M(v)=f^n(y_n)=x$. 这与 (c,d) 是正型区间的假定矛盾. 这矛盾说明 $x\notin\omega(f)$ 的反证假定不成立. 因而我们有 $x\in\omega(f)$. 因此，有

$$\omega(f)\supset\Omega(f)\cap f(\Omega(f))\cap f^2(\Omega(f))\cap\cdots$$

定理 17.3 证毕.

§18　用计算机算出来的"周期点"
——链回归点

物理学家研究函数迭代的时候，经常使用电子计算机这种现代化的工具. 例如第 9 节中介绍的费根堡常数，就是对好些函数族通过计算机的计算而发现的. 现代电子计算机以速度快，容量大为其特色，并能作相当精确的计算；有时为了看清某一个或某一族函数的迭代特性，计算机常常要作几亿次运算，然后在一张小纸上将结果算成上百万个点子. 毫无疑问，计算机在函数迭代的研究中，立下了汗马功劳，那些密密麻麻的点子连成的图形常给人们极

大的启示.数学家们一方面从这些启示中得益,另一方面又对计算机的可靠性提出质疑.

毋庸置疑,再精确的数值计算也是有误差的.例如,计算某一个函数 f 在点 x 处的函数值 $f(x)$ 时,由于数值计算的允许误差,设为 $\varepsilon>0$,你所算得的常常并不是 $f(x)$ 的精确值,而是另外某一个与 $f(x)$ 的绝对值小于 ε 的 x_1.假如你想断定这个给定的 x 是不是周期点,你将要计算 $f^2(x)=f(f(x))$.然而在计算 $f(f(x))$ 时,用作初值的并不是 $f(x)$ 而是 x_1,所得到的既不是 $f^2(x)$ 也不是 $f(x_1)$ 而是某一个与 $f(x_1)$ 之差的绝对值小于 ε 的 x_2,……如此继续下去,这样便得到了一串点 $x_0=x,x_1,x_2,\cdots$,其中后面一个与其前面一个的 f-象的差的绝对值小于 ε,即 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\varepsilon,i=0,1,2,\cdots$.假使对于某一个 $n>0$ 有 $|f(x_{n-1})-x_0|<\varepsilon$,由于在允许误差范围之内,$x_0$ 可能会被当成 x_{n-1} 的像,也就是说 x_0 可能会认为是 f 的 n-周期点,不管它是不是真正的周期点.当然,如果计算的允许误差取小一些,这种误断的可能性也会变小.然而读者不难发现,无论允许误差多么小,任何一个回归点都有可能被误断为周期点(参见引理 18.1).这迫使我们提出一个新概念——链回归点的概念,并去研究链回归点与周期点的关系.概言之,链回归点就是无论如何精确的数值计算都有可能将它误断为周期点的那种点.下面我们给出严谨的定义和论证.主要的结论是:只有在周期点集是闭集的时候,链回归点才都是周期点(参见定理 18.2).

设 f 是线段 I 上的一个连续自映射.$x\in I$ 称为 f 的链回归点,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在着有限个点 $x_0,x_1,\cdots x_m\in I$,使得 $x_0=x_m=x$,并且 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\varepsilon,i=0,1,2,\cdots m-1$(注意,$m$ 不是一个固定的整数,它可以随着 ε 不同而不同.).f 的链回归点构成的集合记作 $CR(f)$.

让我们先来通过例 18.1 看看链回归点集 $CR(f)$ 和真正的周期点集之间可能发生的巨大差异.

例 18.1　设线段 $[0,1]$ 上的连续自映射 f 如图 18.1 所示. 它满足下列条件:

(a)　$f(0)=0, f(a)=a, f(b)=1$, 以及 $f(1)=1$, 其中 $0<a<b<1$.

(b)　f 在区间 $[0,a]$, $[a,b]$ 和 $[b,1]$ 上, 都是严格单调的; 并且对于任意 $x\in(0,a)$, $f(x)>x$.

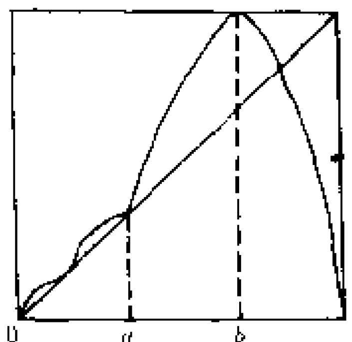


图 18.1

请读者自己去验证一下, 对于这个映射 f 而言, $\Omega(f)=\overline{P(f)}=[a,1]\cup\{0\}$, $CR(f)=[0,1]$. 这也就是说, $(0,a)$ 中虽然没有任何一个周期点, 甚至于没有任何一个非游荡点, 但它的每一个点都是 f 的链回归点.

现在, 我们来研究链回归点集的若干基本性质.

引理 18.1　设 f 是线段 I 上的连续自映射. 则 f 的每一个非游荡点都是链回归点. 因此,

$$CR(f)\supset\Omega(f)\supset W(f)\supset\overline{P(f)}\supset R(f)\supset P(f).$$

证明　设 $x\in I$ 是 f 的一个非游荡点. 给定 $\varepsilon>0$. 根据推论 13.1, 存在 $y\in I$ 和整数 $m>0$, 使得 $|y-f(x)|<\varepsilon$ 以及 $f^m(y)=x$. 这时, 若令 $x_0=x, x_1=y, x_2=f(y),\cdots,x_m=f^{m-1}(y)$, 以及 $x_{m+1}=f^m(y)=x$, 则有 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\varepsilon, i=0,\cdots,m$. 这就证明了 x 是 f 的链回归点. 因而 $CR(f)\supset\Omega(f)$. 引理中其它的包含关系可参见引理 15.1 和定理 17.2. 证毕.

引理 18.2　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 则 f 的链回归点集是 I 的闭子集, 并且也是 f 的不变子集.

证明 设 $x\in I$ 是 f 的链回归点集 $CR(f)$ 的一个聚点. 任意给定 $\varepsilon>0$. 根据 f 的连续性, 存在 $\delta>0$ 使得对于任意的 $z\in I$, $|z-x|<\delta$, 有 $|f(z)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 选定一个满足上述条件并且小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的 $\delta>0$. 然后选取 f 的链回归点 $y\in I$, 使得 $|x-y|<\delta$. 根据链回归点的定义, 存在 $y_0,y_1,\cdots,y_m\in I$, 使得 $y_0=y_m=y$ 以及 $|f(y_i)-y_{i+1}|<\frac{\varepsilon}{2}$, $i=0,1,\cdots,m-1$. 令 $x_0=x, x_1=y_1, x_2=y_2,\cdots,x_{m-1}=y_{m-1}$, 以及 $x_m=x$. 此时, 有

$$
\begin{aligned}
|f(x_0)-x_1| &= |f(x)-y_1| \\
&\leqslant |f(x)-f(y)|+|f(y_0)-y_1|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
|f(x_i)-x_{i+1}|=|f(y_i)-y_{i+1}|<\varepsilon, \qquad i=1,2,\cdots,m-2
$$

以及

$$
\begin{aligned}
|f(x_{m-1}-x_m| &= |f(y_{m-1})-x| \\
&\leqslant |f(y_{m-1})-y_m|+|y-x|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

根据链回归点的定义, x 是 f 的链回归点. 这就证明了 f 的链回归点集是闭集.

证明 f 的链回归点集 $CR(f)$ 是 f 的不变子集即证明 $f(CR(f))\subset CR(f)$. 为证明这一点, 设 x 是 f 的一个链回归点. 我们要证明的是, $f(x)$ 也是 f 的链回归点. 任意给定 $\varepsilon>0$. 选取 $\frac{\varepsilon}{2}>\delta>0$, 使得当 $z\in I$, $|f(x)-z|<\delta$, 则有 $|f^2(x)-f(z)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 根据 f 在点 $f(x)$ 处的连续性, 这是可以做到的. 由于 x 是 f 的链回归点, 故存在 $x_0,x_1,\cdots,x_m\in I$ 满足条件 $x_0=x_m=x$, 并且 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\delta$, $i=0,1,\cdots,m-1$. 现在令 $y_0=f(x), y_1=x_2, y_2=x_3,\cdots,y_{m-1}=x_m$, 以及 $y_m=f(x)$. 这时我们有

$$
|f(y_0)-y_1| = |f^2(x)-x_2|
$$

$$= |f^2(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - x_2| < \varepsilon$$

$$|f(y_i) - y_{i+1}| = |f(x_{i+1}) - x_{i+2}| < \varepsilon, \qquad i = 1,2,\cdots,m-2$$

以及

$$|f(y_{m-1}) - y_m| = |f(x_m) - f(x)| = 0$$

以上证明了 $f(x)$ 是 f 的链回归点. 证毕.

引理 18.3 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射,又设 $n>0$ 为任意整数. 则 f 的链回归点集 $CR(f)$ 等于 f^n 的链回归点集 $CR(f^n)$.

证明 先来证明 $CR(f^n)\subset CR(f)$. 设 $x\in CR(f^n)$. 任意给定 $\varepsilon>0$. 因而存在 $x_0,x_1,\cdots,x_m\in I$,使得 $x_0=x_m=x$ 以及 $|f^n(x_i)-x_{i+1}|<\varepsilon$, $i=0,1,2,\cdots,m$. 若令 $y_0=x_0, y_1=f(x_0),\cdots y_{n-1}=f^{n-1}(x_0), y_n=x_1$, $y_{n+1}=f(x_1),\cdots,y_{2n-1}=f^{n-1}(x_1), y_{2n}=x_2,\cdots,y_{(m-1)n}=x_{m-1}, y_{(m-1)n+1}=f(x_{m-1}),\cdots,y_{(m-1)n+(n-1)}=f^{n-1}(x_{m-1})$,以及 $y_{mn}=x$,则有 $y_0=y_{mn}=x$ 以及 $|f(y_i)-y_{i+1}|<\varepsilon, i=0,1,\cdots,mn-1$. 这证明了 $x\in CR(f)$.

再来证明 $CR(f)\subset CR(f^n)$. 设 $x\in CR(f)$. 任意给定 $\varepsilon>0$,对于 $i=1,2,\cdots,n-1$,根据 f^i 的一致连续性,选取 $\delta_i>0$,使得当 $z_1,z_2\in I$, $|z_1-z_2|<\delta_i$,有 $|f^i(z_1)-f^i(z_2)|<\frac{\varepsilon}{n}$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_{n-1},\frac{\varepsilon}{n}\}$. 可见,当 $z_1,z_2\in I$, $|z_1-z_2|<\delta$ 时,有 $|f^i(z_1)-f^i(z_2)|<\frac{\varepsilon}{n}, i=0,1,\cdots,n-1$. 根据链回归点的定义,有 $x_0,x_1,\cdots,x_m\in I$ 使得 $x_0=x_m=x$ 以及 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\delta$. 令 $x_{m+1}=x_1, x_{m+2}=x_2,\cdots,x_{2m}=x_m,\cdots$, $x_{(n-1)m}=x_m, x_{(n-1)m+1}=x_1,\cdots,x_{(n-1)m+(m-1)}=x_{m-1}, x_{nm}=x_m$. 易见我们有 $x_0=x_{nm}=x$ 以及 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\delta, i=0,1,\cdots,mn-1$. 若令 $y_0=x_0, y_1=x_n, y_2=x_{2n},\cdots,y_m=x_{mn}\in I$,则有 $y_0=y_m=x$ 以及

$$\begin{aligned}|f^n(y_i)-y_{i+1}| &= |f^n(x_{in})-x_{(i+1)n}| \\ &\leqslant |f^n(x_{in})-f^{n-1}(x_{in+1})| \\ &\quad + |f^{n-1}(x_{in+1})-f^{n-2}(x_{in+2})|\end{aligned}$$

$$+\cdots+|f(x_{in+n-1})-x_{(i+1)n}|$$
$$<\varepsilon$$

这是因为根据 $\delta>0$ 的选取以及 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\delta$，我们可有

$$|f^{j+1}(x_i)-f^j(x_{i+1})|<\frac{\varepsilon}{n},\quad j=0,1,\cdots,n-1,$$

对于任意 $i=0,1,\cdots,mn-1$ 成立. 这样我们便完成了 x 是 f^n 的链回归点的证明. 证毕.

现在我们来证明本节的一些主要的结论.

定理 18.1　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. f 的周期点的周期都是 2 的方幂，当且仅当对于任何非周期的链回归点的 ω-极限集中不包含任何周期点.

为了证明这个定理，需要后面的引理 18.4～引理 18.8. 定理 18.1 的证明将被置于引理 18.8 之后.

引理 18.4　设 f 为线段 I 上的一个连续自映射. 如果存在点 $x\in I$ 使得

$$f^{qm}(x)\leqslant x<f^m(x)\quad 或者\quad f^m(x)<x\leqslant f^{qm}(x)$$

成立，其中 $m>0$ 是某一整数，$q>0$ 是某一个奇数，则 f 有一个周期点以非 2 的方幂为周期.

引理 18.4 是定理 13.1 的明显推论，无需特别证明.

引理 18.5　设 f 为线段 I 上的一个连续自映射. 又设 A 为 I 的开子集，并且满足条件 $f(\overline{A})\subset A$（其中 $\overline{A}$ 为 A 的闭包），则对于任意 $x\in CR(f)-A$ 和任意 $n>0$，有 $f^n(x)\notin A$.

证明　根据引理 18.3，我们只要证明对于任意 $x\in CR(f)-A$，$f(x)\notin A$. 用反证法证明这一点如下.

设对于某一点 $x\in CR(f)-A$，有 $f(x)\in A$. 令

$$\varepsilon=\inf\{|y_1-y_2|;y_1\notin A,y_2\in f(\overline{A})\}$$

根据本引理条件可知 $I-A$ 与 $f(\overline{A})$ 为互不相交的闭集，所以 $\varepsilon>0$. 由于 $x\in CR(f)$，故存在 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in I$，使得 $x_0=x_n=x$ 以及 $|f(x_i)-x_{i+1}|<\varepsilon$ 对于 $i=0,1,\cdots,n-1$ 成立. 于是 $f(x_0)=f(x)\in A$ 蕴含着 $x_1\in A$. 根据引理对 A 的假设又有 $f(x_1)\in A$. 依次类推，最后得到 $f(x_{n-1})\in A$ 以及 $x_n=x\in A$. 这是一个矛盾. 证毕.

引理 18.6　设 f 为线段 I 上的一个连续自映射，$x\in I$. 若 $y\in\omega(x,f)$，则对于任意 $n>0$，存在 $l>0$ 使得 $f^l(y)\in\omega(x,f^n)$.

证明　设 $y\in\omega(x,f)$，即存在正整数序列 $m_i\to\infty$，使得点的序列 $f^{m_i}(x)\to y$. 对于 $n>0$，令 $m_i=p_in+r_i$，其中 $0\leqslant r_i<n$. 诸 r_i 中必有无限多个具有相同的值，设此值为 r. 即 $r_{i_1}=r_{i_2}=\cdots=r$，其中 $i_1<i_2<\cdots$. 令 $l=n-r>0$，则

$$f^{m_{i_k}+l}(x)=(f^n)^{p_{i_k}+1}(x)\to f^l(y).$$

这表示 $f^l(y)\in\omega(x,f^n)$. 证毕.

引理 18.7　设 f 为线段 $I=[a,b]$ 上的一个连续自映射，如果 f 有一个非周期的链回归点 x（即 $x\in CR(f)-P(f)$），使得 x 的（相对于 f 而言的）ω- 极限集中有 f 的不动点，则 f 有周期点以非 2 的方幂为周期.

证明　设 $x\in CR(f)-P(f)$，使得 $e\in\omega(x,f)$，其中 e 是 f 的一个不动点. 不失一般性，设 $x<e$. 依次证述本引理如下.

(A)　如果存在 $y\in(x,e)$ 以及某一整数 $n>0$，使得 $f^n(y)=x$，则本引理的结论成立.

因为，一方面这时存在 $z\in(y,e)$ 使得 $f^n(z)=y$；另一方面由于 $e\in\omega(x,f)$，据引理 18.6，我们有 $e\in\omega(x,f^n)$；因此存在着某一整数 $m>0$，使得 $f^{mn}(x)\in(z,b)$. 于是

$$f^n(y)<y<f^{n(m+1)}(y)$$

$$f^n(z)<z<f^{n(m+2)}(z)$$

$m+1$ 与 $m+2$ 两个整数中总有一个是奇数. 根据引理 18.4,f 有周期点以非 2 的方幂为周期.

(*B*) 存在 $\bar{u}\in(x,b]$ 使得 $f(\bar{u})=x$. 因为如果不然,则令 $I=(x,b]$,它是 I 的开集,将满足条件 $f(\bar{A})\subset A$,从而据引理 18.5,$\omega(x,f)\cap A=\varnothing$. 这与 $e\in\omega(x,f)\cap A$ 矛盾.

(*C*) 令 $u=\min\{\bar{u}\in(x,b]:f(\bar{u})=x\}$. 显然,这时有 $f(u)=x$ 并且对于任意 $y\in(x,u)$ 有 $f(y)\neq x$.

(*D*) 如果 $u\in(x,e)$,根据(*A*),本引理已被证明. 下设 $u\in(e,b]$. 这时,存在 $v\in(x,u)$ 使得 $f(v)=u$. 因为,如果不然,$B=(x,u)$ 是 I 的开集,并且满足条件 $f^2(\bar{B})\subset B$,那么 $e\in\omega(x,f^2)\cap B$ 将与引理 18.5 矛盾.

(*E*) 如果 $v\in(x,e)$,根据(*A*),本引理证毕. 下设 $v\in(e,u)$. 这时,易见存在 $u'\in(v,u)$ 使得 $f(u')=e$;存在 $v'\in(e,v)$ 使得 $f(v')=u'$. 因而对于任意 $m\geqslant 2$,有

$$e=f^m(v')<v'<f(v')$$

据引理 18.4,f 有周期点以非 2 的方幂为周期. 引理 18.7 证毕.

引理 18.8 设 f 为线段 I 上的一个连续自映射. 若 f 有一个 3-周期轨,则存在 $z\in\overline{P(f)}-P(f)$,使得 $f^n(z)\in P(f)$ 对于某一个整数 $n>0$ 成立.

证明 不失一般性,设 $p_1<p_2<p_3$ 是 f 的一个 3-周期轨,满足 $f(p_1)=p_2$,$f(p_2)=p_3$,以及 $f(p_3)=p_1$. 易见 $f^2([p_1,p_2])\supset[p_1,p_2]$ 和 $f^2([p_2,p_3])\supset[p_2,p_3]$. 因此,在 $[p_1,p_2]$ 和 $[p_2,p_3]$ 中,都有 $g=f^2$ 的不动点. 令

$$x_0=\max\{x\in[p_1,p_2]:g(x)=x\}$$

$$y_0=\min\{x\in[p_2,p_3]:g(x)=x\}$$

显然,$x_0<y_0$ 并且它们都是 g 的不动点. 由于 $g(p_1)=p_3$,所以存在 u

$\in[p_1,x_0]$使得$g(u)=y_0$. 令

$$z=\max\{u\in[p_1,x_0]:g(u)=y_0\}$$

显然,$g(z)=y_0$并且$z_0<y_0$. 我们指出:

(A) 对于任意充分小的$\varepsilon>0$,存在着$\delta>0$,使得

$$g([z,z+\varepsilon])\supset[y_0-\delta,y_0]$$

因为只要ε充分小,我们便有$g(z+\varepsilon)<y_0$.(否则将与z的定义矛盾).

(B) 对于任意$\delta>0$,存在整数$m>0$,使得$g^m([y_0-\delta,y_0])\supset[p_1,y_0]$为证明这一点,只需注意在$(x_0,y_0)$中没有$g$的不动点,并且对于$p_2\in[x_0,y_0]$我们有$g(p_2)=p_1$. 因此,如果(B)不成立,则对于任意$m>0$都有$p_2\notin g^m([y_0-\delta,y_0])$(只要$p_2\in g^m([y_0-\delta,y_0])$则有$[p_1,y_0]\subset g^{m+1}([y_0-\delta,y_0])$). 这时,$y_0-\delta,g(y_0-\delta),g^2(y_0-\delta),\cdots$将是一个递减的序列,它将收敛于$g$的某一个不动点$v_0\leqslant x_0$. 从而当$m$充分大时,便有$p_2<g^m(y_0-\delta)$. 而这蕴含着$p_2\in g^m([y_0-\delta,y_0])$. 这与前面所说互相矛盾.

因此,根据(A)和(B),对于任意充分小的$\varepsilon>0$,我们可以取到整数$m>0$,使得$g^{m+1}([z,z+\varepsilon])\supset[z,z+\varepsilon]$. 于是$[z,z+\varepsilon]$中有$g$的周期点,即$z\in\overline{P(g)}=\overline{P(f)}$. 然而$g(z)=f^2(z)=y_0\in P(g)=P(f)$. 另外,由于$z\neq y_0$而$f^2(z)$是$f^2$的不动点,所以$z\notin P(f)$. 以上这些就证明了引理 18.8.

定理 18.1 的证明 如果f有一个周期点以非 2 的方幂为周期,根据沙可夫斯基定理(定理 8.1),存在着一个整数$m>0$,使得f^m有 3-周期轨. 根据引理 18.8,存在$z\in I$满足$z\in\overline{P(f^m)}-P(f^m)$,使得$f^{mn}(z)\in P(f^m)$对于某整数$n>0$成立. 注意$P(f^m)=P(f)$以及$\overline{P(f)}\subset CR(f)$,我们有$z$是$f$的一个非周期的链回归点,并且有$f$的周期点$f^{mn}(z)$在它的$\omega$-极限集中. 这就证明了定理

18.1的必要性.

以下证明定理18.1的充分性. 设x是f的一个非周期的链回归点,并且在它的ω-极限集中有一个n—周期点p. 根据引理18.6,存在某一整数$l>0$,使得$p'=f^l(p)\in\omega(x,f^n)$. p'是f^n的不动点. 根据引理18.3,x是f^n的一个非周期的链回归点. 对f^n应用引理18.7可知,f^n有周期点以非2的方幂为周期. 因而f也有周期点以非2的方幂为周期. 证毕.

定理18.2 设f为线段I上的一个连续自映射,则以下条件是等价的:

(1) f的链回归点都是周期点;

(2) f的非游荡点都是周期点;

(3) f的ω—极限点都是周期点;

(4) f的周期点集为闭集.

证明 根据引理18.1可知,(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4). 现设(4)成立,即$\overline{P(f)}=P(f)$. 根据定理14.3,这时,f的周期点的周期都是2的方幂. 假如(1)不成立,也就是说存在点$x\in CR(f)-P(f)$. 根据推论15.4,我们有$\omega(x,f)\cap\overline{P(f)}\neq\varnothing$. 由于$\overline{P(f)}=P(f)$,所以在$\omega(x,f)$中有周期点. 根据定理18.1,这与$f$的周期点的周期都是2的方幂矛盾. 这就给出了(4)⇒(1). 定理证毕.

附录　与本章内容有关的文献简介

回归点,ω-极限点,非游荡点和链回归点这些概念是周期点的概念逐次推广而得到的一系列概念. 它们都是动力体系中的重要概念. 对于一般的紧致度量空间的自映射,这些点类的研究早在

三、四十年代就已开始.然而,对于线段连续自映射而言,相应的工作却是近十年来的热门课题.

在第14节中,我们介绍了关于线段连续自映射的回归点集的某些结果.其中定理14.1对于一般的紧致度量空间的连续自映射也是成立的,这一定理由P. Erdös和A. H. Stone[78]早在40年代即已证明.L. Young[79]对于分段单调的线段连续自映射的情况,证明了定理14.2的结论;而这个定理本身则属于E. M. Coven和G. A. Hedlund[80].我们已经看到用引理14.4来证明定理14.2是十分方便的;在以后几节中这个引理也有很大的作用,它是熊金城[81]发现的(稍后W. A. Coppel[82],[83]也独立地得到).定理14.3最早见于熊金城[84].

第15与第16两节研究线段连续自映射的非游荡点.一个关键性的引理是引理15.5,它由E. M. Coven和Z. Nitecki[85]首先证明(当f为分段单调的映射时的证明亦可参见[79]).定理15.1及其推论,以及定理15.2的证明均可参见熊金城[81].然而定理15.2则是由A. N. Sarkovskii[86]首先给出.定理15.3属于熊金城[87],它的一些特款则可见于E. M. Coven和Z. Nitecki[80],周作领[88]以及Z. Nitecki[89].定理16.1和定理16.2均首先见于[85].定理16.3则由周作领[90]和Z. Nitecki[91]独立地发现.在本书中这三条定理是按同一方式统一地证明的.

第17节研究线段连续自映射的ω—极限点,定理17.1来自熊金城[92].定理17.2原则上属于A. N. Sarkovskii[93].定理17.3首先由A. Blokh[94]宣布(未附证明),在这里是首次给出完整的证明.

第18节研究线段连续自映射的链回归点.这类研究工作首先开始于L. Block和J. Franke[95].定理18.1见于熊金城[96].由这

一定理，可以得到许多先前的已知结果，部份结果我们列举在习题 18.21 中，读者可以参见廖公夫[97]，[98]，周作领和刘旺金[99]，L. Block[100]以及 Z. Nitecki[91]. 至于定理 18.2 的证明背景则更为复杂；条件(2)和(4)的等价性可参见周作领[101]，Z. Nitecki[91]和熊金城[96]；条件(1)和(4)的等价性则属于 L. Block 和 J. Franke[95]. 这一定理涉及一批早期工作和特例，可参见 L. Block[102]，[103]，E. M. Coven 和 G. A. Hedlund[104]，周作领[105]，[106]以及周作领和刘旺金[107].

习 题

14.1 请读者自己补全引理 12.1，引理 12.2 和引理 12.3 的证明.

14.2 找一个线段 I 上的连续自映射 f 和一个点 $x\in I$，使得 x 是 f 的周期点的聚点但不是回归点.（提示：考虑例 10.1 和例 10.2 中的映射.）

14.3 设 f 是线段 I 上的连续自映射. 证明：

(a) 如果 $x\in I$ 是 f 的回归点，则对于任意整数 $i\geqslant 0$，$f^i(x)$还是 f 的回归点.

(b) 如果 $x\in I$ 满足条件：存在某一个整数 $i\geqslant 0$ 使得 $f^i(x)$是 f 的周期点，则 x 不是 f 的回归点.

(c) 如果 $x\in I$ 是 f 的回归点，则对于任意整数 $i\geqslant 0$，存在 f 的回归点 $y\in I$，使得 $f^i(y)=x$.

(d) 集合 $R(f)-P(f)$不可能是非空的有限集.

(e) $f(R(f))=R(f)$以及 $f(R(f)-P(F))=R(f)-$

$P(F)$.

14.4　证明：如果线段连续自映射 f 的周期点的周期集合 $PP(f)$ 是一个有限集，则 f 的每一个回归点都是周期点.

14.5　证明史迭芬映射 st 的回归点集是闭集.（从前节的正文和习题 14.2 可知，st 周期点的周期都是 2 的方幂，它的周期点集不是闭集.）

14.6　构作一个线段连续自映射的例子，使得这个映射的定义域中，有一个没有周期点的区间，而这个区间既是正型的又是负型的.

14.7　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. a 是线段 I 的左端点（或右端点）. 如果对于某一个点 $c\in I$，$[a,c)$ 中（或 $(c,a]$ 中）没有 f 的周期点，那么 $[a,c)$（或 $(c,a]$）一定是正型区间（或负型区间）.

15.8　证明：对于例 13.1 中的线段连续自映射 f，$\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 恰好只有一个点.

15.9　构造线段 $[0,1]$ 上的一个连续自映射 f，使得 $\Omega(f)-\overline{P(f)}$ 是无限的可数集.

15.10　证明：若 $K\subset I$ 是线段 I 上的连续自映射 f 的（强）不变子集，则对于任意整数 $n>0$，K 是 f^n 的（强）不变子集.

15.11　举例说明线段连续自映射 f 的非荡集 $\Omega(f)$ 可以不是 f 的强不变子集.

15.12　设 K 是有限个区间的并集，证明 $\overline{K}-K$ 是有限集.（空集也算作是有限集.）

15.13　设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. 若 x 是 f 的一个非游荡点，并且序列 $x,f(x),f^2(x),\cdots$ 有一个子序列收敛于点 $y\in I$，则对于任意 $\varepsilon>0$ 和任意整数 $L>0$ 存在 $z\in I$，

$|z-y|<\varepsilon$，和整数 $m>L$，使得 $f^m(z)=x$.

15.14 构造线段[0,1]上的一个连续自映射 f，使得 f 有一个不是不动点的非游荡点 x 满足条件：$f(x)$ 是 f 的不动点，并且在 $(x;f(x))$ 中没有 f 的周期点.[$(a;b)$ 表示以 a 和 b 为其两个端点的开区间.]

15.15 完成推论 15.3 的证明.

15.16 设 f 为线段 I 上的一个连续自映射. 证明 $\Omega(f)=I$ 当且仅当 $\overline{p(f)}=I$.

16.17 请读者仔细验证，对于绘在图 16.2 中的那个映射 f 而言，点 a 是 f 的非游荡点而不是 f^2 的非游荡点. 并指出 a 一定不在 f 的周期点集的闭包之中.

16.18 设 f 为线段连续自映射，$n>0$ 是一个整数. 证明：如果 x 是 f^n 的非游荡点，则 x 对于 f 而言的正向轨道 $\{x,f(x),f^2(x),\cdots\}$ 中的每一个点都是 f^n 的非游荡点.

16.19 构造一个线段连续自映射 f，使得

$$\Omega(f)=\Omega(f^2)\neq\Omega(f^4).$$

17.20 补全引理 17.1 的证明.

17.21 设 f 是线段连续自映射. 证明：若 x 是 f 的一个 ω—极限点，则对于任意整数 $n>0$，x 必为 f^n 的非游荡点.

17.22 设 f 是线段连续自映射. 证明：x 为 f 的一个 ω—极限点，即 $x\in W(f)$ 当且仅当对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $y\in I$ 和整数 n_1，n_2，$n_3>0$，使得 $|f^{n_i}(y)-x|<\varepsilon$，$i=1,2,3$.

17.23 补足定理 17.2 之证明.

17.24 证明：若 $x\in\Omega(f)-\overline{P(f)}$，并且 x 的正向轨道是有限的，则 x 是 $\Omega(f)$ 的孤立点，其中 f 为线段连续自映射.

18.25 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射. $x\in I$ 称为 f 的一个特

殊异状点，如果(a) x 不是 f 的周期点，(b) 存在某一整数 $n>0$，使得 $f^n(x)$ 为 f 的一个周期点，并且满足条件：有点列 $y_i\to f^n(x)$ 和正整数序列 m_i 使得 $f^{m_i}(y_i)=x, i=1,2,\cdots$；$x\in I$ 称为 f 的一个异状点，如果(a) x 不是 f 的周期点，(b) 存在 f 的某一周期点 $p\in\omega(x,f)$ 满足条件：有点列 $y_i\to p$ 和正整数序列 m_i，使得 $f^{m_i}(y_i)=x, i=1,2,3\cdots$. 证明下列结论：

(a) 每一个特殊异状点都是异状点，每一个异状点都是链回归点.

(b) 若 $x\in\Omega(f)-P(f)$，对于某一整数 $n>0$，有 $f^n(x)\in P(f)$，则 x 是一个特殊异状点；若 $x\in\Omega(f)-P(f)$ 使得 $\omega(x,f)\cap P(f)\neq\varnothing$，则 x 是一个异状点.

18.26 证明下述定理：设 f 为线段连续自映射. 则下列条件等价：

(a) f 的周期点的周期都是 2 的方幂；

(b) 对于任何 $x\in\overline{P(f)}-P(f)$ 和任何整数 $n>0$ 都有 $f^n(x)\notin P(f)$；

(c) 对于任何 $x\in\overline{P(f)}-P(f)$ 都有 $\omega(x,f)\cap P(f)=\varnothing$；

(d) 对于任何 $x\in\Omega(f)-P(f)$ 和任何整数 $n>0$，都有 $f^n(x)\notin P(f)$；

(e) 对于任何 $x\in\Omega(f)-P(f)$ 都有 $\omega(x,f)\cap P(f)=\varnothing$；

(f) f 没有特殊异状点；

(g) f 没有异状点；

(h) 对于任何 $x\in CR(f)-P(f)$ 和任何整数 $n>0$ 都有 $f^n(x)\notin P(f)$；

(i) 对于任何 $x\in CR(f)-P(f)$，都有 $\omega(x,f)\cap P(f)=\varnothing$

[提示：应用引理 18.7，引理 18.8 和本节习题 18.25.]

第四章 结构稳定、分支与混沌

在第二章和第三章里，大多数情形，仅仅要求所讨论的函数是连续的．在连续性前提下研究迭代，属于拓扑动力系统领域．如果进一步要求进行迭代的函数具有可微性，所进行的研究便属于微分动力系统领域了．

因为描述物理现象或其他自然现象时，所涉及的函数一般都是可微的，所以微分动力系统的研究具有十分重要的意义．在第二章里介绍的马蹄映射及费根堡现象，已属于微分动力系统的研究对象．本章将对有关的问题作较为系统的讨论．

正如我国著名数学家廖山涛教授所指出的那样．微分动力系统的中心概念是结构稳定，而结构稳定的反面是分支，因而对结构稳定与分支的研究，成为微分动力系统的主流．这一方向的研究联系着近年混沌现象的发现，引起众多的不同学科领域专家们的极大兴趣．尽管本书只涉及一维动力系统，但也能用较简单的例子来介绍关于结构稳定、分支及混沌的有关概念及现象．

下面将从一个具体的例子讲起．

§19 二次函数族的迭代

一次函数 $f(x)=ax+b$，迭代多少次也是一次函数. 二次函数则不同，迭代 n 次就成为 2^n 次多项式，性质如何，是一眼看不透的.

有了电脑，人们用直接计算的方法对二次函数的迭代作了大量研究，发现了一系列复杂而有趣的现象. 在第二章的 §9 中所介绍的费根堡现象，就是通过研究二次函数迭代而发现的. 别看二次函数简单，却是“麻雀虽小，五脏俱全”. 几乎所有与函数迭代有关的重要概念和深刻的规律，都能在二次函数迭代过程中呈现出来.

我们对二次函数的迭代作研究，将采用比较系统的观点. 不是单单研究某一个二次函数的迭代，而是研究带有参数 μ 的一族二次函数

$$g_\mu(x)=\mu x(1-x),\quad (\mu>0) \tag{19.1}$$

看看随着参数 μ 的变化，g_μ 的迭代轨道是如何发生变化的. 把二次函数写成(19.1)的形式，是为了让一个不动点与原点重合，讨论起来简单一些. 任何具有两个不动点的二次函数，总可以通过简单的不影响其迭代轨道的变换——让坐标原点沿直线 $y=x$ 移动以及改变尺度——化为(19.1)的形式. 在 §9 中我们已经看到，正是由于对这种二次函数族的研究，才导至有趣的费根堡现象的发现.

为了观察起来方便. 我们先引进从图上看迭代轨道性质的直观方法. 为了表示一个函数，可以采用好几种方法，如函数表、分析表达式以及函数图像等. 直接在计算机上算迭代，相当于一次一次

地查表. 本书前面几章,主要则是从函数的表达式出发来研究迭代. 从函数图像上直接观察迭代轨道的趋势,也不失为一种有效的方法. 其优点是浅显明白,直观易懂. 虽然它不能表示出精细的结果,但可以一目了然,统观全局趋势,因面广泛被采用.

我们称这种方法为"蛛网法". 这里用图 19.1 来说明蛛网法的道理. 在直角坐标系中,画出了函数 $f(x)$的图象 $\Sigma: y=f(x)$,及直线 $l: y=x$. 这条直线在函数迭代的图表示中起着特别重要的作用.

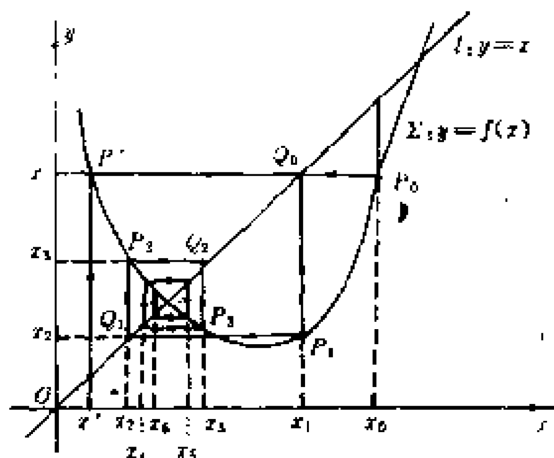


图 19.1

为了研究迭代轨道 $\{x_n=f^n(x_0), n=0,1,2,\cdots\}$的来龙去脉,在 x 轴上标出点 x_0,开始作蛛网图. 首先,自 x_0 向曲线 Σ 引铅垂线(即与 y 轴平行的直线)交曲线 Σ 于 P_0,则 P_0 的纵坐标为 $f(x_0)=x_1$,这就在图上找到了 x_1. 为了把 x_1 从 y 轴上映到 x 轴上,正好用到直线 $l: y=x$. 方法是:过 P_0 作 x 轴的平行线交 l 于 Q_0,则 Q_0 的纵横坐标均为 x_1. 再由 Q_0 引铅垂线与曲线 Σ 交于 P_1,则 P_1 的纵坐标为 $f(x_1)=x_2$.

一般规律是:$P_k=(x_k, x_{k+1})$,这里 $X_{k+1}=f(x_k)$. 过 P_k 作水平线交 l 于 Q_k,过 Q_k 作铅垂线交 Σ 于 P_{k+1}. 如此继续,便可以直观地看出 $x_0, x_1, x_2, \cdots$的行踪与曲线 Σ 之间的关系. 在图上用矢号标出诸点 P_k、Q_k 产生的顺序,便于顺藤采果. 这就绕过了求 $f^n(x)$的分析表达式的难题,定性地把握着轨道$\{x_n=f^n(x_0)\}$的动向.

现在我们回到二次函数迭代的问题上来. 一般说来,二次函数可表成

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \tag{19.2}$$

令 $h(x)=ux+v$，$h(x)$的反函数为 $h^{-1}(x)=\frac{x-v}{u}$，这里 u、v 是待定系数，取：

$$F(x) = h^{-1} \circ f \circ h(x) \tag{19.3}$$

则得

$$F(x) = aux^2 + (2av + b)x + \frac{av^2 + bv + c - v}{u} \tag{19.4}$$

取 $u=-\frac{1}{a}$，$v=-\frac{b}{2a}$，则得

$$F(x) = -x^2 + (\frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} - ac) \tag{19.5}$$

由(19.3)得

$$f^n(x) = h \circ F^n \circ h^{-1}(x) \tag{19.6}$$

因而，由 F 的迭代轨道可以得知 f 的迭代轨道的性质.

记 $\lambda=\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}-ac$，则 $F(x)=\lambda-x^2$. 当 $\lambda<-\frac{1}{4}$时，易知恒有 $F(x)<x$，而且无论 x 为正或为负，总有 $F(x)<0$. 这时，一定有 $F^n(x)\to-\infty$对一切 x 成立. 我们不针对这样的二次函数，而对一般情形加以讨论：

定理 19.1　若 $f(x)$是定义于开区间(α,β)上的连续函数，对任一 $x\in(\alpha,\beta)$恒有 $f(x)\in(\alpha,\beta)$，且 $f(x)>x$(或$<x$). 则对任一 $x\in(\alpha,\beta)$，有

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \beta(\text{或} \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = \alpha) \tag{19.7}$$

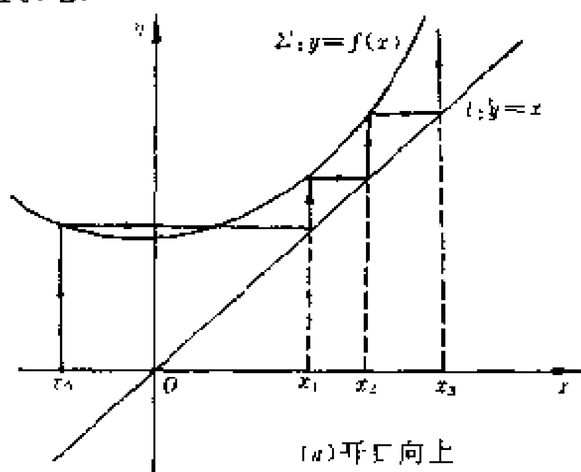
这里 α 和 β 可以是$-\infty$或$+\infty$.

这个定理是第一章的 § 5 中定理 5.4 情形 2 的直接推论. 证明很简单：只要注意到$\{f^n(x)\}$是单调数列，而且它不可能在$(\alpha$、$\beta)$内取到极限便够了.

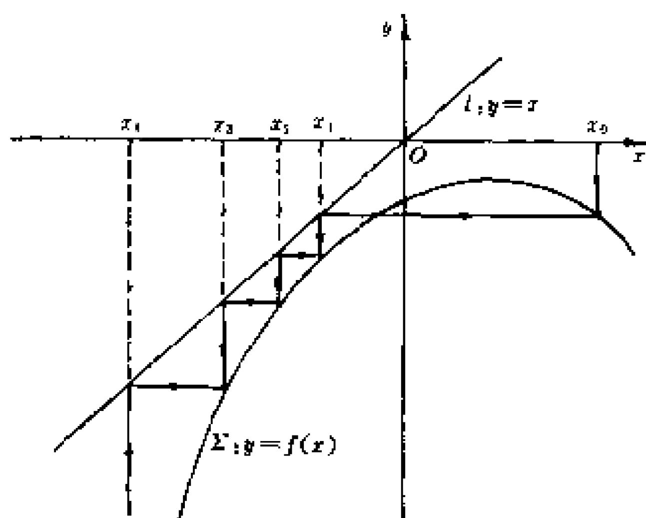
因此，关于无不动点的二次函数，其迭代轨道性状十分简单：抛物线开口向上时，轨道均趋于$+\infty$，抛物线开口向下时，则均趋

于$-\infty$. 这类函数的蛛网图如图 19.2.

当 $\lambda=-\frac{1}{4}$时,(19.5)中的$F(x)=-(x^2+\frac{1}{4})$. 这时,$F(x)$仅有一个不动点$x^*=-\frac{1}{2}$,而抛物线 $y=-(x^2+\frac{1}{2})$ 在点 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$处与直线 $y=x$ 相切,并且对一切 x 有不等式$F(x)=-(x^2+\frac{1}{4})\leqslant x$,等式仅当 $x=-\frac{1}{2}$时成立. 对这类函数,我们有



(a)开口向上



(b)开口向下

图 19.2

定理 19.2 设$f(x)$是(α,β)上的连续函数,在(α,β)内仅有一个极值点 c,而$f(x)$在(α,c)和(c,β)上单调. 对一切 $x\in(\alpha,\beta)$均有 $f(x)\geqslant x$(或$\leqslant x$),且 $f(x)\in(\alpha,\beta)$. 在(α,β)内 $f(x)$仅有一个不动点$x^*=f(x^*)$. 则当 $f(x)>x^*$ 时(或$<x^*$)时,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x)=\beta$(或 α),当 $f(x)\leqslant x^*$时(或$\geqslant x^*$时),有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x)=x^*$.

证明 不妨设 $f(x)\geqslant x$ 对一切 $x\in(\alpha,\beta)$成立. ($f(x)\leqslant x$ 的情形请读者自证). 则 $f(x)$在(x^*,β)上满足定理 19.1 的条件,因而对 $x\in(x^*,\beta)$有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x)=\beta$. 若对 $x_1\in(\alpha,x^*)$有 $f(x_1)>x^*$,则 $x_2=f(x_1)\in(x^*,\beta)$,也有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x_1)=\lim\limits_{n\to+\infty}f^n(x_2)=\beta$.

另一方面，因有 x 使 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x)=\beta$，可知 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取极小，故必有 $c\leqslant f(c)\leqslant f(x^*)=x^*$. 于是满足条件 $f(x)\leqslant x^*$ 的点 x 组成一个以 x^* 为右端点的区间 $[t,x^*]$ 或 (α,x^*). 在区间 $[t,x^*]$ 或 (α,x^*) 上用定理 19.1 可知，对一切使 $f(x)\leqslant x^*$ 的 x，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x)=x^*$. 证毕.

把定理 19.2 用于函数 $F(x)=-(x^2+\frac{1}{2})$，可知

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} F^n(x)=-\dfrac{1}{2} & (\text{当 } x\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}])\\ \lim\limits_{n\to+\infty} F^n(x)=-\infty & (\text{当 } |x|>\dfrac{1}{2})\end{cases} \tag{19.8}$$

类似的情形如图 19.3 所示. 这里只画出了开口向下的情况.

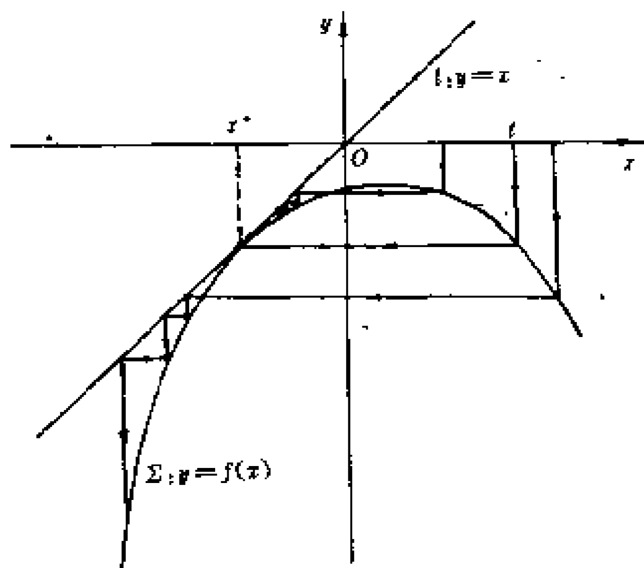


图 19.3

当 $\lambda>-\frac{1}{4}$ 时，(19.5)中的函数 $F(x)$ 有两个不动点. 易求出它们是

$$\begin{cases}e_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}\\ e_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}\end{cases} \tag{19.9}$$

为简化计算，作一些变换.

令 $g(x)=h^{-1}\circ F\circ h(x)$，

这里仍设 $h(x)=ux+v$，其反函数 $h^{-1}(x)=\frac{1}{u}(x-v)$ 则

$$g(x)=-ux^2-2vx+\frac{1}{u}(\lambda-v-v^2) \tag{19.10}$$

取 $v=e_1$，$u=-2v=\mu>0$，则得 $g(x)=\mu x(1-x)$，这就化成了我们要讨论的二次函数族(19.1)的形式. 稍后将指出，对族(19.1)的迭代

进行讨论，并补充定理 19.1 与 19.2 中的至多有一个不动点的情形，就把所有的二次函数都考虑在内了．下面我们给出 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 的性质：

定理 19.3 设 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)\quad (x\in(-\infty,+\infty))$，则

1° $g_\mu(0)=g_\mu(1)=0$；

2° 令 $p_\mu=\dfrac{\mu-1}{\mu}$，则 $g_\mu(p_\mu)=p_\mu$；

3° 当 $\mu>1$ 时，$p_\mu\in(0,1)$；

4° 当 $\mu>1$，若 $x\notin[0,1]$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$.

证明 性质 1°、2°、3°极易验证．关于 4°，先指出如果 $x<0$，则必有 $g_\mu(x)<x$，故 $g_\mu(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上满足定理 19.1 之条件．便知当 $x<0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$．当 $x>1$ 时，显见有 $g_\mu(x)<0$，故亦有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^{n-1}(g_\mu(x))=-\infty$．证毕．

至于 $0<\mu\leqslant1$ 的情形，有下面定理：

定理 19.4 当 $0<\mu\leqslant1$ 时，函数 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 有下列性质：

1° 当 $\mu=1$ 时，$g_\mu(x)$ 有唯一不动点 $x=0$．对一切 $x\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=0$；对其他的 x，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$，

2° 当 $0<\mu<1$ 时，若 $x\in\left(\dfrac{\mu-1}{\mu},\dfrac{1}{\mu}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=0$；若 $x_0=\dfrac{1}{\mu}$ 或 $\dfrac{\mu-1}{\mu}$，则 $g_\mu^n(x_0)=\dfrac{\mu-1}{\mu}\ (n=1,2,3,\cdots)$；若 $x<\dfrac{\mu-1}{\mu}$ 或 $x>\dfrac{1}{\mu}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$.

证明 当 $\mu=1$ 时，$g_\mu(x)=x(1-x)\leqslant x$ 且等式仅当 $x=0$ 时成立，应用定理 19.2（这时 $x^*=0,t=1$）即得性质 1°.

当 $0<\mu<1$ 时，在 $\left(-\infty,\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)$ 上有 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)<x$，由

定理19.1可知当 $x\in(-\infty,\frac{\mu-1}{\mu})$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$. 而当 $x\in(\frac{1}{\mu},+\infty)$ 时，有 $g_\mu(x)\in(-\infty,\frac{\mu-1}{\mu})$，故也有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=-\infty$. 当 $x\in(\frac{\mu-1}{\mu},0)$ 时，有 $g_\mu(x)>x$，用定理 19.1 可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=0$；当 $x\in(0,1)$ 时，因 $g_\mu(x)<x$，又可用定理 19.1 得 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=0$；当 $x\in(0,1)$ 时，有 $g_\mu(x)\in(\frac{\mu-1}{\mu},0)$，故也有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=0$. 最后，对 $x_0=0,1$，易知 $g_\mu^n(x_0)=0$；而对 $x_0=\frac{\mu-1}{\mu},\frac{1}{\mu}$，易知 $g_\mu^n(x_0)=\frac{\mu-1}{\mu}$. 证毕.

图 19.4 画出了 $0<\mu<1$ 时，$g_\mu(x)$ 迭代的蛛网图. 容易发现，图中的两个不动点 $e_1=\frac{\mu-1}{\mu}$ 和 $e_2=0$ 附近的轨道的性态有显著不同. 在 e_2 的附近有这样的邻域 $(e_2-\sigma,e_2+\sigma)$，使当 $x\in(e_2-\sigma,e_2+\sigma)$ 时总有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=e_2$. 这样的不动点，在前而第一章的 §5（定理 5.4 之前）中已提到过，叫做稳定不动点，今后也称之为吸引不动点，或叫做渊点. 与此相反，不动点 e_1 却具有这样的邻域 $(e_1-\sigma,e_1+\sigma)$，使得无论 x 多么靠近 e_1，只要 $x\neq e_1$，总有自然数 n 使 $g_\mu^n(x)\notin(e_1-\sigma,e_1+\sigma)$. 像 e_1 这样的不动点，叫做不稳定的不动点，或者叫排斥不动点，或源点.

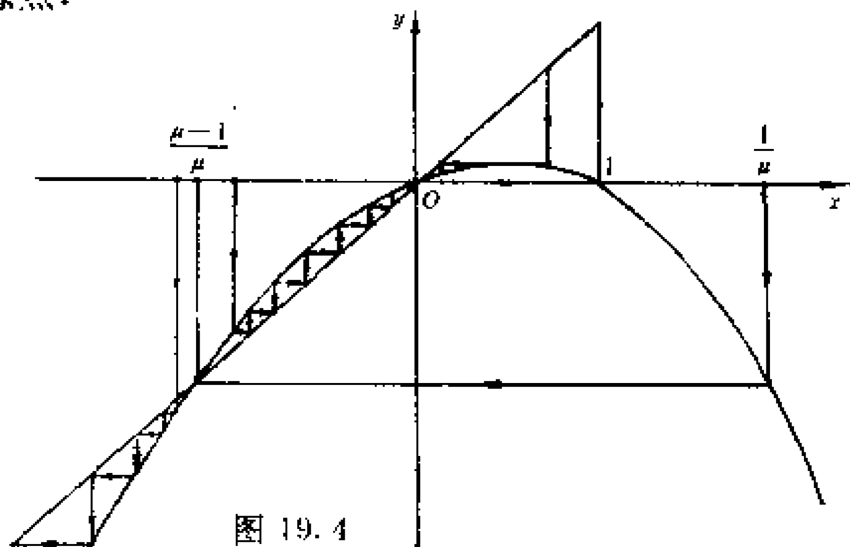


图 19.4

一般地，若 x^* 是 f 的 m 周期点，则当 x^* 是 f^m 的吸引(排斥)不动点时，x^* 叫做 f 的吸引(排斥)周期点.

对应于 $\mu=1$，$g_\mu(x)$的不动点 $x^*=0$ 具有与 e_1、e_2 都不同的性质：当 $x\in(x^*, x^*+\sigma)$时，$g_\mu^n(x)$趋于 x^*；而当 $x\in(x^*-\sigma, x^*)$时，不论 x 多么靠近 x^*，总有 n 使 $g_\mu^n(x)$逃出$(x^*-\sigma, x^*)$. 这时，称不动点为右吸引而左排斥的不动点. 图 19.4 清楚地描绘出 $g_\mu(x)$迭代下 x 轴上的点的运动规律：除了几个特殊点之外，其余的点均向吸引不动点或 $-\infty$ 跑去. 其实，$-\infty$ 也可以看成是广义的吸引不动点.

利用微商很容易判别一个不动点的吸斥性，即：

定理 19.5 设 x^* 是 $f(x)$的不动点. 则当导数的绝对值 $|f'(x^*)|<1$ 时，x^* 是 f 的吸引不动点，当 $|f'(x^*)|>1$ 时，x^* 是 f 的排斥不动点.

这个定理证明极易，从略.

当 $|f'(x^*)|=1$ 时，情况就复杂了. 这时 x^* 可能是吸引不动点，排斥不动点或半边吸引半边排斥. 具体情况要根据 f 在 x^* 处的二阶甚至三阶导数而定.

现在我们已知道，当 $0<\mu\leqslant 1$ 时，$g_\mu(x)$的迭代轨道的性态十分简单，没有值得深究之处. 当 $\mu>1$ 时，若 x 在$[0,1]$之外，则$g_\mu^n(x)$趋于 $-\infty$，也已一目了然. 如果有什么更有趣的事，只可能在 $\mu>1$ 时发生在$[0,1]$上. 以下就集中注意力于这种情形.

定理 19.6 当 $1<\mu<3$ 时，$g_\mu(x)=\mu x(1-x)$有下列性质：

1° 不动点 $x^*=\dfrac{\mu-1}{\mu}$是 g_μ 的吸引不动点，而 $x=0$ 是 g_μ 的排斥不动点，

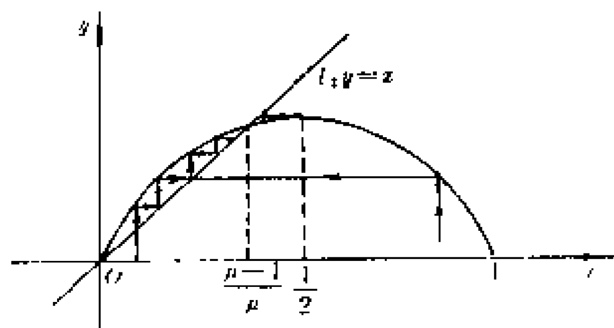
2° 对一切 $x\in(0,1)$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\mu^n(x)=\dfrac{\mu-1}{\mu}$.

证明 为证明 1°，只要计算 $g_\mu(x)$在两个不动点处的导数：

$$\begin{cases} g'_\mu(x) = \mu(1-2x) \\ g'_\mu(0) = \mu \\ g'_\mu\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right) = 2-\mu \end{cases} \tag{19·11}$$

由 $1<\mu<3$ 可知 $|g'_\mu(0)|>1$ 而 $\left|g'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right|<1$.

对性质 2°，可分两种情形讨论. 当 $1<\mu\leqslant 2$ 时，情形比较简单在区间 $\left(0,\frac{\mu-1}{\mu}\right)$ 上有 $g_\mu(x)>x$，由定理 19.1 即知 $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\mu^n(x)=\frac{\mu-1}{\mu}$ 对一切 $x\in\left(0,\frac{\mu-1}{\mu}\right)$ 成立. 在区间 $\left(\frac{\mu-1}{\mu},\frac{1}{2}\right)$ 上有 $g_\mu(x)<x$，因而也可以用定理 19.1 导出当 $x\in\left(\frac{\mu-1}{\mu},\frac{1}{2}\right)$ 时，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\mu^n(x)=\frac{\mu-1}{\mu}$. 至于当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时，总有 $g_\mu(x)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$（除了 $\mu=2$ 的平凡情形，这时 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=\frac{\mu-1}{\mu}$），这证明了对一切 $x\in(0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\mu^n(x)=\frac{\mu-1}{\mu}$



（图 19.5）

当 $2<\mu<3$ 时，情形要稍复杂一些. 首先，考虑方程 $g_\mu(x)=\frac{1}{2}$ 的根 r_1 和 r_2. 易验证

$$0<r_1<\frac{1}{\mu}<\frac{\mu-1}{\mu}<r_2<1 \tag{19.12}$$

当 $x\in(r_1,r_2)$ 时，显然有 $g_\mu(x)\in\left[\frac{1}{2},r_2\right]$. 而当 $x\in\left[\frac{1}{2},r_2\right]$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} g_\mu^n(x)=\frac{\mu-1}{\mu}$. 为证明这一点，只需估计 $g_\mu(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},r_2\right]$ 上的导数. 由于 $r_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\mu}}$，故当 $x\in\left[\frac{1}{2},r_2\right]$ 时有

$$x=\frac{1}{2}+\sigma\quad(0\leqslant\sigma\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{\mu}})$$

于是当 $x\in[\frac{1}{2},r_2]$时

$$|g'_\mu(x)|=|\mu(1-2x)|=|2\mu\sigma|\leqslant\left|\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\frac{2}{\mu}}\right|<\frac{1}{2}\tag{19.13}$$

从而得

$$\begin{aligned}|g_\mu^n(x)-\frac{\mu-1}{\mu}|&=g_\mu^n(x)-g^n(\frac{\mu-1}{\mu})|\\&=|g'_\mu(\xi)(g_\mu^{n-1}(x)-g^{n-1}(\frac{\mu-1}{\mu})|\\&\leqslant\frac{1}{2}|g_\mu^{n-1}(x)-g^{n-1}(\frac{\mu-1}{\mu})|\\&\leqslant\frac{1}{2^n}|x-\frac{\mu-1}{\mu}|<\frac{1}{2^n}\quad(x\in[\frac{1}{2},r_2])\end{aligned}\tag{19.14}$$

这证明了我们的断言：$\lim\limits_{n\to+\infty}g_\mu^n(x)=\frac{\mu-1}{\mu}$对一切 $x\in[\frac{1}{2},r_2]$成立，从而对一切 $x\in[r_1,r_2]$成立.

若 $x\in(r_2,1)$，则 $g_\mu(x)\in(0,\frac{1}{2})$；当 $x\in(0,\frac{1}{2})$时，总有 n 使 $g_\mu^n(x)\in[r_1,r_2]$. 这表明对一切 $x\in(0,1)$，当 $n\to+\infty$时有 $g_\mu^n(x)\to\frac{\mu-1}{\mu}$. 证毕.

当 $2<\mu<3$ 时，$g_\mu(x)$的迭代蛛网图如图 19.6.

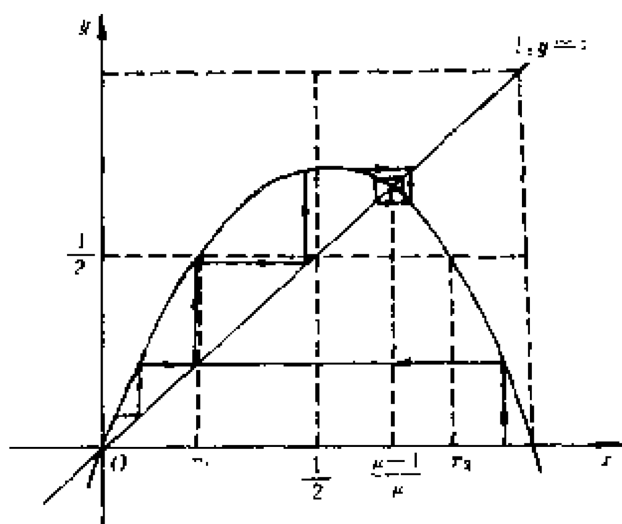


图 19.6

当 $\mu\in[3,4]$时，$g_\mu(x)$的迭代轨道异常复杂而有趣 我们放在后面专门讨论它.

当 $\mu=4$ 时，$g_\mu(\frac{1}{2})=1$，这时，$g_\mu(x)$的性质类似于例 10.1

所给出的分段线性函数. 而当 $\mu>4$ 时，有 $g_\mu(\frac{1}{2})>1$，$g_\mu(x)$就将成为例 10.2 所介绍的线段上的马蹄映射了. 但是，要证明这些事实，还需引入新的工具. 如果只考虑 $\mu>2+\sqrt{5}$ 的情形，现在就能证明$g_\mu(x)$是线段上的马蹄映射.

事实上，这时$(-\infty,+\infty)$代替了例 10.2 中的$(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$. 考虑方程 $g_\mu(x)=1$ 的两个根 r_1 与 r_2，显然有 $0<r_1<\frac{1}{2}<r_2<1$. 用 r_1 与 r_2 代替例 10.2 中的$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$，则例 10.2 中的条件(ii)到(v)均得到满足，只不过用$-\infty$代替了(v)中所要求的吸引不动点 x^*. 剩下要检验的是条件(i)

求出 $g_\mu(x)=1$ 的根

$$r_1=\frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}}{2},\quad r_2=\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}}{2} \tag{19.15}$$

则当 $x\in[0,r_1]\cup[r_2,1]$时，由 $\mu>2+\sqrt{5}$ 可得

$$\begin{aligned}|g'_\mu(x)|&=|\mu(1-2x)|\geqslant\left|\mu\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}\right|=\\&\sqrt{\mu^2-4\mu}=\sqrt{\mu(\mu-4)}\\&>\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=1\end{aligned} \tag{19.16}$$

这表明 $g_\mu(x)$符合例 10.2 中诸条件，因而是线段上的马蹄映射. 但对 $\mu\in(4,2+\sqrt{5})$，就要有更多的准备才能证明了.

§20 拓扑共轭与结构稳定性

回顾在§1 中，我们曾引进了变换 $f=h$ [illegible] 之(1.

6))式，并用它把 f 的迭代问题转化为较简单的 g 的迭代问题．这种技巧在前面不止一次地出现：§3 中用这种办法求迭代根（推论 3.4），并用这种办法解决嵌入半流的问题（推论 3.6）；§4 用这种办法讨论Schroder方程及其在求迭代根时的应用；§5 中也反复使用这种变换，不过是用具体的函数 x^r，$\frac{1}{x}$ 等直接代替 $h(x)$ 罢了．在 §19 中，又用这种变换把二次函数的形式化简．现在，我们把这种重要的技巧提升为一般概念，即拓扑共轭的概念．

定义 20.1 设 A,B 是两个拓扑空间，$f:A\to A$ 和 $g:B\to B$ 分别是 A 与 B 上的自映射．如果存在 A 到 B 的同胚 $h:A\to B$，使得

$$h\circ f=g\circ h \tag{20.1}$$

则称 f 与 g 是拓扑共轭的．同胚 h 叫做 f 到 g 的一个拓扑共轭．

不熟悉拓扑学的读者，可以直接把拓扑空间 A、B 理解为直线段、曲线弧、空间区域或曲面等具体的几何对象．同胚则理解为 A 与 B 之间的连续的一一映射．

当 f 与 g 拓扑共轭时，记作 $f\sim g$，或者为了强调 h 的作用，写成 $f\overset{h}{\sim}g$．拓扑共轭关系是一种等价关系．也就是说，它满足下面三条：

(1) 反身性：f 与 f 是拓扑共轭的，即 $f\sim f$．

(2) 对称性：若 $f\sim g$，则 $g\sim f$．

(3) 传递性：若 $f\sim g$，$g\sim\varphi$，则 $f\sim\varphi$．

因此，把相互拓扑共轭的自映射可以归为一类，叫做拓扑共轭类．属于同一个拓扑共轭类的自映射，它们的迭代轨道有相同的拓扑性质．这是因为，当 $f\overset{h}{\sim}g$ 时，由(20.1)可得

$$h(f^n(x))=g^n(h(x)) \tag{20.2}$$

这表明在同胚 h 作用之下，f 在 A 中过 x 的一条轨道 $\{x,f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x),\cdots\}$ 变成了 g 在 B 中过 $h(x)$ 的一条轨道 $\{h(x)$，

$g(h(x)),\cdots,g^n(h(x)),\cdots\}$. 不难检验：若 f 有不动点 x^*，则 g 有不动点 $h(x^*)$；若 x^* 是 f 的吸引（排斥）不动点，则 $h(x^*)$ 是 g 的吸引（排斥）不动点；若 f 有 k 周期轨 $\{x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}\}$，则 g 有 k 周期轨 $\{h(x_0),h(x_1),\cdots,h(x_{k-1})\}$，而且当 $x_j=f(x_{j-1})$ 时，有 $h(x_j)=g(h(x_{j-1}))$；等等. 总之，涉及动力系统研究中所感兴趣的一切性质，f 与 g 都是一样的. 这样，在动力系统研究中，相互共轭的两个自映射可看作是一样的. 因此，当研究一个自映射的动力系统性质时，可以用与它拓扑共轭的较简单的自映射代替它. 正是从这个观点出发，对于二次函数的研究，可以仅限于 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$，再加上那些至多有一个不动点的二次函数 $F_\lambda(x)=\lambda-x^2$. 这里参数 $\mu>0$ 而 $\lambda<-\frac{1}{4}$. 这是因为，别的二次函数都与这里的某个 g_μ 或 F_λ 拓扑共轭. 在 § 19 已给出了实现这种拓扑共轭的具体方法.

如何判断两个映射 f 与 g 是不是拓扑共轭的，这是极其困难的问题. 即使 f 与 g 都是线段上的函数，目前也还没有得到完满的回答. 但是，若 f,g 都是严格单调的连续函数，则不难给出简单的方法来解决它. 利用 § 3 中的结果（定理 3.3）可得

定理 20.2　设 f 和 g 分别是$[a,b]$和$[c,d]$上的连续而且严格递增的函数，且 $a\leqslant f(x)\leqslant b,c\leqslant g(x)\leqslant d$. 则 f 与 g 拓扑共轭的充分必要条件是

1° 在 f 的不动点集 E_f 与 g 的不动点集 E_g 之间，存在保序的一一对应（或逆序的一一对应）$\varphi:E_f\to E_g$，并且

2° 在 E_f 与 E_g 中相互对应的不动点同为或同非$[a,b]$或$[c,d]$之端点，（即 x 与 $\varphi(x)$同为或同非函数定义区间端点），

3° 在$(a,b)\setminus E_f$ 和$(c,d)\setminus E_g$ 的对应的构成区间(u,v)与$(\varphi(u),\varphi(v))$（或在反序的情形下，为$(\varphi(v),\varphi(u))$）上，$f(x)-x(x\in(u,v))$与 $g(y)-y(y\in(\varphi(u),\varphi(v))$或$(\varphi(v),\varphi(u))$有相同的符号（或在反

序情形下，有相反的符号）.

证明　先证充分性：先设 $\varphi: E_f \to E_g$ 是保序的. 由于条件 2°，又因为 E_f 和 E_g 都是闭集，我们可以在 $[a,b]\setminus E_f$ 的每个构成区间上作线性插值以开拓 φ，故不妨干脆设 φ 是 $[a,b]$ 到 $[c,d]$ 的保序同胚——即 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格递增连续函数，$\varphi(a)=c$，$\varphi(b)=d$，且 $f(x)=x$ 当且仅当 $g(\varphi(x))=\varphi(x)$ 时成立. 令

$$G(x) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi(x) \quad (x \in [a,b]) \tag{20.2}$$

则易知 $G(x)$ 的不动点之集也是 E_f. 设 $\delta_i=(u_i,v_i)$ 是开集 $(a,b)\setminus E_f$ 的任一个构成区间，我们断言有连续而且严格递增的函数 $h_i(x)$ 定义于 $[u_i,v_i]$，使得 $h_i(u_i)=u_i$，$h_i(v_i)=v_i$，且

$$h_i(f(x)) = G(h_i(x)) \quad (x \in [u_i,v_i]) \tag{20.3}$$

当 u_i,v_i 都是 f（也是 G）的不动点时，直接应用定理 3.3，即可构造出这样的 h_i，注意到 f 和 G 在 (u_i,v_i) 上同号，可知 h_i 递增. 当 u_i,v_i 中仅有一个是不动点，而另一个是区间 $[a,b]$ 的端点时，要先处理一下，再用定理 3.3. 为确定起见，不失一般性，可设 $u_i=a$，而 v_i 是不动点. 这时，一定有 $f(a)>a$（由条件 2°，$G(a)>a$），这是因为 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ 之故. 取 $a^*<a$，把 f 和 G 都保持连续且严格递增地开拓到 $[a^*,v_i]$ 上，并使 $f(a^*)=G(a^*)=a^*$，且 f 和 G 在 (a^*,v_i) 内仍无不动点. 则由定理 3.3，有在 $[a^*,v_i]$ 上连续且严格递增的 $h^*(x)$，使

$$\begin{cases} h^* \circ f(x) = G \circ h^*(x) & (x \in [a^*,v_i]) \\ h^*(f(a)) = G(a),\ h^*(a) = a \end{cases} \tag{20.4}$$

且 $h^*(a^*)=a^*$，$h^*(v_i)=v_i$. 然后取 h_i 为 h^* 在 $[u_i,v_i]=[a,v_i]$ 上的限制，便得(20.3)，完全证实了我们的断言. 剩下的一步是在 $[a,b]$ 上取

$$\psi(x) = \begin{cases} x & (\text{当 } x \in E_f) \\ h_i(x) & (\text{当 } x \in \delta_i) \end{cases} \tag{20.5}$$

于是 $\psi(x)$是$[a,b]$到自身的保向同胚，且满足

$$\psi(f(x)) = G(\psi(x)) = \varphi^{-1}\circ g\circ\varphi\circ\psi(x) \quad (x\in[a,b] \tag{20.6}$$

再取 $h=\varphi\circ\psi$，则 h 是$[a,b]$到$[c,d]$的保向同胚，且有

$$h(f(x)) = g(h(x)) \qquad (x\in[a,b]) \tag{20.7}$$

至此，条件的充分性对于 φ 保序的情形获证.

若 φ 是反序的，仍设 φ 已开拓为$[a,b]$到$[c,d]$的反序同胚，即 φ 是$[a,b]$上的严格递减连续函数，且 $\varphi(a)=d,\varphi(b)=c$. 令 $G=\varphi^{-1}(g(\varphi(x))$，则易验证 G 是$[a,b]$上的严格递增连续自映射，且其不动点集为 E_f. 而且当 $f(x)>x(f(x)<x)$时，由条件 3°可知，$g(\varphi(x)<\varphi(x))$(或 $g(\varphi(x))>\varphi(x)$)，再由 φ 的严格递减性得 $G(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))>\varphi^{-1}(\varphi(x))=x$(或 $G(x)<x$)于是可以照样应用定理 3.3. 至此，定理的充分性部份已证毕.

必要性部份的证明是简单的：如果有$[a,b]$到$[c,d]$的同胚 h 满足 $h\circ f=g\circ h$，则 h 自然是 E_f 到 E_g 的保序映射或逆序映射. 而且 h 递增时(保序)由$f(x)>x$ 易知$g(h(x))=h(f(x))>h(x)$，h 递减时(反序)由$f(x)>x$ 得 $g(h(x))<h(x)$ 等等，即条件 1°、2°、3°必须成立. 证毕.

根据这个定理，我们能够一眼看出两个连续而且严格递增的函数是不是拓扑共轭的. 如图

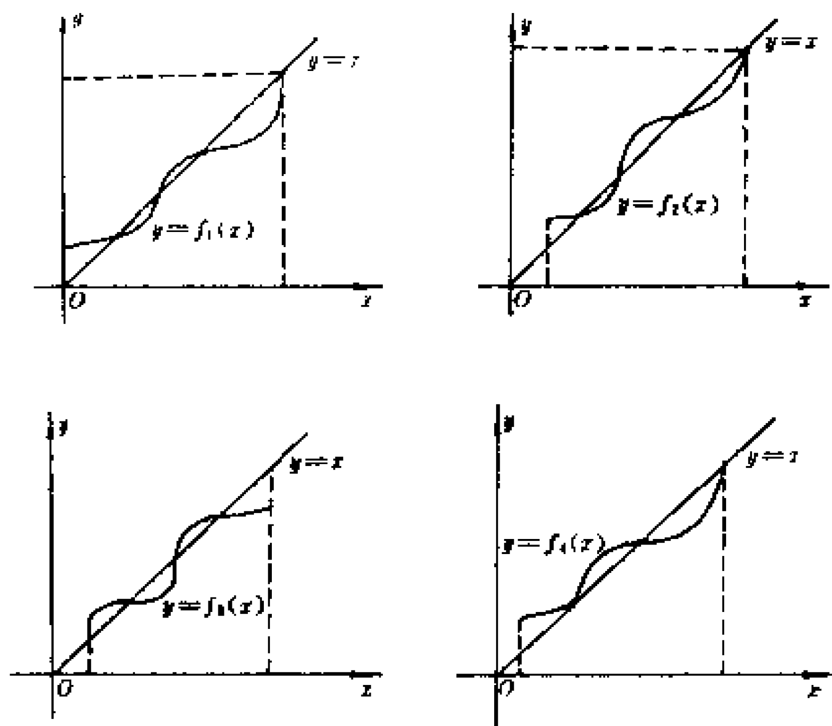


图 20.1

20.1 中的四个函数，f_1 与 f_2 可经过保向同胚而拓扑共轭，f_1 与 f_3 可经过反向同胚而拓扑共轭，但 f_1 与 f_4 不是拓扑共轭的.

下面讨论两个严格递减的连续函数拓扑共轭的条件. 首先注意到，递减连续函数的特点是：它至多有一个不动点，但可能有若干个2-周期轨. 每个2-周期轨所包含的一对2-周期点分居于不动点的两侧. 此外，递减函数的二次迭代是递增的. 根据这些性质，不难把问题化归为递增的情形.

定理 20.3 设 f 和 g 分别是$[a,b]$和$[c,d]$上的严格递减的连续函数，且 $f(a)=b,f(b)=a,g(c)=d,g(d)=c$. 分别记 x_0 与 y_0 为 f 与 g 的唯一不动点. 则 f 与 g 拓扑共轭的充分必要条件是：存在保向同胚 $\varphi:[a,x_0]\to[c,y_0]$使

$$\varphi\circ f^2(x)=g^2\circ\varphi(x)\quad(x\in[a,x_0])\tag{20.8}$$

或存在反向同胚 $\psi:[a,x_0]\to[y_0,d]$使

$$\psi\circ f^2(x)=g^2\circ\psi(x)\quad(x\in[a,x_0])\tag{20.9}$$

证明 记 f 在$[a,x_0]$上的限制为 f_1，在$[x_0,b]$上的限制为 f_2，g 在$[c,y_0]$上的限制为 g_1，在$[y_0,d]$上的限制为 g_2，则(20.8)实际上是

$$\varphi\circ f_2\circ f_1(x)=g_2\circ g_1\circ\varphi(x)\quad(x\in[a,x_0])\tag{20.10}$$

在$[x_0,b]$上定义

$$\varphi^*(x)=g_2^{-1}\circ\varphi\circ f_2(x)\quad(x\in[x_0,b])\tag{20.11}$$

则 φ^* 是$[x_0,b]$到$[y_0,d]$的保向同胚，且 $\varphi^*(x_0)=y_0$. 令

$$h(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (\text{当 } x\in[a,x_0])\\ \varphi^*(x) & (\text{当 } x\in[x_0,b])\end{cases}\tag{20.12}$$

则 $h(x)$是$[a,b]$到$[c,d]$的保向同胚. 当 $x\in[a,x_0]$时，有

$$\begin{aligned}h\circ f(x)&=\varphi^*\circ f_1(x)=g_2^{-1}\circ\varphi\circ f_2\circ f_1(x)\\&=g_2^{-1}\circ g_2\circ g_1\circ\varphi(x)\end{aligned}$$

$$= g_1 \circ \varphi(x) = g \circ h(x) \tag{20.13}$$

上式推导中用了(20.10)、(20.11)及 $h(x)$之定义. 当 $x\in[x_0,b]$时，

$$h \circ f(x) = \varphi \circ f_2(x) = g_2 \circ g_2^{-1} \circ \varphi \circ f_2(x)$$

$$= g_2 \circ \varphi^*(x) = g \circ h(x) \tag{20.14}$$

综合(20.13)及(20.14)，就证明了 h 是 f 到 g 的一个保向的拓扑共轭. 若有(20.9)则实际上是

$$\psi \circ f_2 \circ f_1(x) = g_1 \circ g_2 \circ \psi(x) \quad (x \in [a,x_0]) \tag{20.15}$$

则可在$[x_0,b]$上定义

$$\psi^*(x) = g_1^{-1} \circ \psi \circ f_2(x) \quad (x \in [x_0,b]) \tag{20.16}$$

于是 ψ^* 是$[x_0,b]$到$[c,x_0]$的反向同胚. 取

$$h(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \in [a,x_0]) \\ \psi^*(x) & (x \in [x_0,b]) \end{cases} \tag{20.17}$$

则仿(20.13)及(20.14)易证，h 是 f 到 g 的一个反向的拓扑共轭. 证毕.

顺便指出，定理 20.3 中要求 $f(a)=b, f(b)=a, g(c)=d, g(d)=c$，这并不失去一般性. 对于不满足这些条件的函数，可先加以开拓，再转回到原有定义域上讨论. 即可得出一些使 $f\sim g$ 的附加条件. 这些附加条件都是平凡的，从略.

在拓扑共轭概念的基础上，我们进而引进结构稳定的概念. 这是动力系统研究中最重要的一个基本概念.

我们研究的函数迭代，往往是某个实际过程的数学模型. 由于显然的理由，数学模型中的函数 $f(x)$和真正的实际过程中的函数 $f^*(x)$不可能完全一样. 无论如何，总有些误差. 那么，当 f 与 f^* 的差别很小时，f 的迭代轨道与 f^* 的迭代轨道之间的差别是不是也会很小呢？ 如果小的差别不引起迭代轨道性质上的根本变化(如：非周期轨变成了周期轨，4-周期轨变成了 5-周期轨). 那我们可以

放心地用 f 代替 f^* 来研究. 如果"差之毫厘,失之千里",那就不行了. 类似地,用电子计算机研究函数迭代时,由于计算中舍入误差不可避免,实际上是用一个很接近 f^* 的函数 f 代替了 f^*. 这种代替的后果如何? 是不是会使研究的结论根本失效? 这当然是不容回避的问题.

为了从数学上研究这个问题,先得使概念精确化. 什么叫做两个函数很接近? 什么叫做"差之毫厘,失之千里"? 都应当有严格的定义.

定义 20.4 设 f 和 g 都是线段 I 上的函数. f 与 g 之间的 C^0-距离记作 $d_0(f,g)$. 定义为

$$d_0(f,g)=\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)| \tag{20.18}$$

如果 f 和 g 都是 r 次可微的,则可以定义它们之间的 C^r-距离 $d_r(f,g)$ 如下

$$d_r(f,g)=\sup_{x\in I}\{|f(x)-g(x)|,|f'(x)-g'(x)|,\cdots,|f^r(x)-g^r(x)|\} \tag{20.19}$$

两函数之间的 C^r-距离可以是任意非负实数或无穷. 而且 C^r-距离总不超过 C^{r+1}-距离,当 $d_0(f,g)=0$ 时,必有 $f=g$. 此外,显然有 $d_r(f,g)=d_r(g,f)$, $d_r(f,g)\leqslant d_r(f,h)+d_r(h,g)$ 等.

定义 20.5 设 f 是线段 I 上的函数,且对 $x\in I$ 有 $f(x)\in I$. 如果存在 $\varepsilon>0$,使对任意满足条件 $d_r(f,g)<\varepsilon$ 的 $g:I\to I$,总有 $f\sim g$,则称 f 在 I 上是 C^r-结构稳定的.

在微分动力系中,最关心的是 C^1-结构稳定问题. 这是因为,C^0-结构稳定太不容易了. 在不动点附近,函数值的微小变化可以产生许多新的不动点,如图 20.2 所示. 但如果要求函数的微商的变动也很小,这种现象就很难发生. 至于 C^2-结构稳定性,有时也用到,特别是对于非单调函数. 这是因为,在极值点附近,即使函数值

和微商的改变都很少，仍可以产生新的极值点而使函数的动力学性质发生变化，如图 20.3 所示.

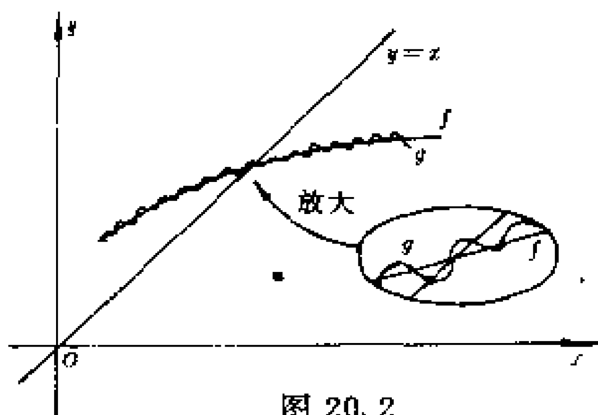


图 20.2

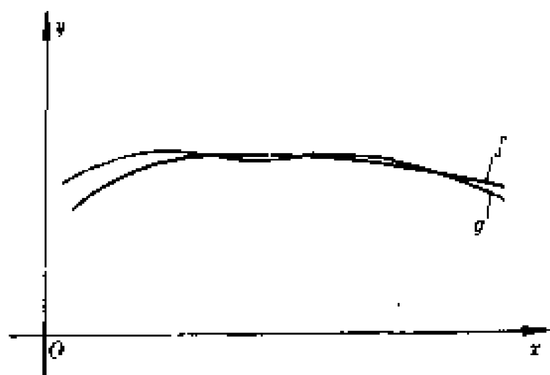


图 20.3

下面的定理，揭示出 C^1-结构稳定函数的特点.

定理 20.6 设 $f: I\to I$ 具有非零连续微商，x_0 是 f 的 m-周期点. 如果 f 在 I 上是 C^1-结构稳定的，则

$$|(f^m(x))'|_{x_0}\neq 1 \quad (20.18)$$

我们不详述这个定理的证明，仅仅给出思路. 首先，由于$f'(x)$在 I 上处处不为零，故只要考虑 f 严格递增或严格递减的情形. 若 f 严格递增，如果 f 的不动点集包含有 I 的某些子区间，即有内点，我们总可以将 f 的值作足够小的变化成为 g，使 $d_1(f,g)<\varepsilon$. 但 g 的不动点集不再有内点，从而不可能有 $f\sim g$. 如果 f 的不动点集不含有内点，即不包含任一区间，但有某个 x_0 使 $f(x_0)=x_0, f'(x_0)=1$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 的足够小邻域可以和函数 $\varphi(x)=x$ 具有任意小的 C^1-距离. 只要取 $g(x)$使它在此邻域外与 $f(x)$的 C^1-距离很小，在此邻域有 $g(x)=x$，并注意平滑连接，便可得到满足 $d_1(f,g)<\varepsilon$ 的 g. 由于 g 的不动点集有内点但 f 的不动点集无内点，故 f 与 g 不可能拓扑共轭. 总之，严格递增函数如果结构稳定，它在不动点处的导数不能为 1，即(20.8)成立. 因为 m 只能为 1，且 $f'(x)>0$ 之故.

对严格递减的 f，(20.18)中的 m 可能为 1 或 2. 这时可考虑

$F(x)=f(f(x))$. 如果 $F(x)$ 的不动点集含有区间，可以对 f 作小改变得到 g，使 $d_r(f,g)<\varepsilon$，且 $G(x)=g(g(x))$ 的不动点集不再含有区间. 反之，若 F 的不动点集无内点，但却有 x_0 使 $f^m(x_0)=x_0$ 且(20.18)不成立. 我们分 $m=1,2$ 两种情形处理. 当 $m=1$，x_0 是 f 的不动点. 当(20.18)不成立时，应当有 $f'(x_0)=-1$. 则在 x_0 邻域 f 与函数 $(2x_0-x)$ 的 C^1-距离很小. 将 f 作小改变成为 g，使 $d_1(f,g)<\varepsilon$，且 g 在 x_0 邻域为 $(2x_0-x)$，则 $G(x)=g(g(x))$ 的不动点之集包含区间，因而不可能有 $f\sim g$. 当 $m=2$，即 x_0 是 f 的 2-周期点时，设 $x_1=f(x_0)$，则 $f(x_1)=x_0$. 这时，若(20.18)不成立，应有

$$f'(x_0)\cdot f'(x_1)=-1 \tag{20.19}$$

于是 f 在 x_0 邻域与函数 $f'(x_0)(x-x_0)+x_1$ 的 C^1-距离很小，在 x_1 邻域与函数 $f'(x_1)(x-x_1)+x_0$ 相差很小. 把 f 在这两点邻域分别代以这两个线性函数，并与邻域外的值平滑连接后得 g，则可使 $d_1(f,g)<\varepsilon$. 但 $G(x)=g(g(x))$ 在 x_0,x_1 邻域具有由不动点组成的小区间，所以不可能有 $f\sim g$.

由定理 20.6，可得下面推论.

推论 20.7 设 $f:I\to I$ 在闭区间 I 上有非零连续微商. 如果 f 在 I 上是 C^1-结构稳定的，则 f 至多有有限个周期点.

这是因为，若 f 有无穷多个周期点，则 f^2 有无穷多个不动点.(因 f 只有不动点或 2-周期点，没有其它周期点). 设 x_0 是 f^2 的不动点的极限点，则 x_0 也是 f^2 的不动点，且一定有

$$(f^2(x))'_{x_0}=1 \tag{20.20}$$

这与(20.18)矛盾.

在定理 20.6 和推论 20.7 中，要求 $f'(x)\neq 0$ 这个条件可以去掉. 因为若在某点 c 有 $f'(c)=0$，则易证 f 不可能 C^1-结构稳定. 理由如图 20.3 所示；但我们不严格证明了.



满足条件(20.18)的周期点 x_0 叫做 $f(x)$ 的双曲周期点. 周期点的双曲性与结构稳定性之间有着密切的联系，这是微分动力系统研究中具有基本重要性的一个事实. 下述定理进一步表明了这个事实.

定理 20.8　设 f 在 $[a,b]$ 上有连续微商且 $f'(x)\neq 0$，且有 $a<f(x)<b$. 若 f 在 $[a,b]$ 上的周期点都是双曲周期点，则 f 是 C^1 一结构稳定的.

证明　设 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值分别为 m 和 M，则 $a<m<M<b$，取 ε_1 为 $m-a$ 和 $b-M$ 中之小者. 则当 $d_1(f,g)<\varepsilon_1$ 时，g 在 $[a,b]$ 上的值不会超出 (a,b).

设 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最小值为 ε_2，则当 $d_1(f,g)<\varepsilon_2$ 时，有 $g'(x)\neq 0$，且 $g'(x)$ 与 $f'(x)$ 同号. 以下分两种情形讨论.

(1)　设在 $[a,b]$ 上有 $f'(x)>0$，则 f 的周期点都是不动点，而且都是双曲不动点. 由于不动点的极限点是非双曲不动点，故 f 只有有穷个不动点 $a_i(i=1,2,\cdots m)$，不妨设 $a<a_1<a_2<\cdots<a_m<b$. 因为 $f'(a_i)\neq 1$，可令

$$\sigma_i=\frac{1}{2}|1-f'(a_i)|>0 \tag{20.21}$$

取 $\delta_i>0$ 足够小，以致在 $\delta_i=(a_i-\delta_i,a_i+\delta_i)$ 上有

$$|f'(x)-f'(a_i)|<\sigma_i\quad(x\in\Delta_i) \tag{20.22}$$

取 ε_3 为所有 σ_i 中之最小者，则当 $d_1(f,g)<\varepsilon_3$ 时，$g(x)-x$ 在每个 Δ_i 上严格单调. 这是因为当 $x\in\Delta_i$ 时，有

$$\begin{aligned}|(g(x)-x)'|&=|g'(x)-1|=|(g'(x)-f'(x))\\&\quad+(f'(x)-f'(a_i))+(f'(a_i)-1)|\\&\geqslant|f'(a_i)-1|-(|g'(x)-f'(x)|+|f'(x)-f'(a_i)|)\\&>2\sigma_i-(\varepsilon_3+\sigma_i)>0\qquad(\text{当 }x\in\Delta_i)\end{aligned} \tag{20.22}$$

记 $D_0=[a,a_1-\delta_1]$，$D_1=[a_1+\delta_1,a_2-\delta_2]$，…，$D_i=[a_i+\delta_i,a_{i+1}-\delta_{i+1}]$，…，$D_m=[a_m+\delta_m,b]$，即诸 $D_j(j=0,1,\cdots,m)$ 顺次是从 $[a,b]$ 中挖去诸 Δ_i 后剩下的 $m+1$ 个闭区间. 设 $|f(x)-x|$ 在 D_j 上的最小值为 m_j. 由于 f 在 D_j 上无不动点，故 $m_j>0$. 令 ε_4 是所有 m_j 中之最小者，则当 $d_1(f,g)<\varepsilon_4$ 时，$g(x)-x$ 与 $f(x)-x$ 在每个 D_j 上有相同的符号. 注意到(20.21)和(20.22)，可知 $f(x)-x$ 在 Δ_i 上严格单调，而且在 $x=a_i\in\Delta_i$ 取到零，故知 $f(x)-x$ 在 Δ_i 的两端异号，从而 $g(x)-x$ 在 Δ_i 两端异号.

现在取 ε 为 ε_1、ε_2、ε_3、ε_4 中之最小者. 则当 $d_1(f,g)<\varepsilon$ 时，g 在 $[a,b]$ 上取值不超出 (a,b)，$g'(x)$ 与 $f'(x)$ 同号，因而 g 严格递增. $g(x)-x$ 与 $f(x)-x$ 在每个 D_j 上同号，$g(x)-x$ 在 Δ_i 两端异号且在 Δ_i 上严格单调，因而有唯一的点 $b_i\in\delta_i$ 使 $g(b_i)-b_i=0$，即 $g(x)$（和 $f(x)$ 一样）在每个 Δ_i 上有一个不动点 b_i. 于是，由定理 20.2 可知，f 与 g 拓扑共轭.

(2) 若在 $[a,b]$ 上有 $f'(x)<0$，令 $F(x)=f(f(x))$，则 $F'(x)>0$. 显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上取值不超出 (a,b)，而且只有有穷个不动点，都是双曲不动点. 设 $d_1(f,g)<\varepsilon$，当 ε 足够小时，g 严格递减，且取值不超出 (a,b). 令 $G(x)=g(g(x))$，则对任意 $\varepsilon_1>0$，只要 $\varepsilon>0$ 足够小，总有 $d_1(F,G)<\varepsilon_1$. 由(1)中所证可知，有 $[a,b]$ 上的保向同胚 h 使 $h\circ F=G\circ h$. 设 x_0 是 f 的唯一不动点，易知 ε 足够小时，g 有唯一不动点 y_0，而且 F 和 G 在 $[a,x_0]$ 上有同样多个不动点. 因而 h 在 $[a,x_0]$ 上的限制一定是 $[a,x_0]$ 到 $[a,y_0]$ 的保向同胚，且有

$$h\circ f\circ f(x)=g\circ g\circ h(x)\quad (x\in[a,x_0]) \tag{20.23}$$

由定理 20.3 可知，f 与 g 拓扑共轭. 证毕.

在高维情形下，也有相应于定理 20.6 及定理 20.8 的结果. 只是双曲周期点的定义要加以推广（要求 $f^m(x)$ 在 m—周期点 x_0 处

的微分的所有特征值之模不为 1)，证明就困难多了. 有兴趣的读者，可进一步阅读本章末所介绍的有关文献.

§ 21　符号动力系统与混沌

在第二章的 § 10 中，我们研究了两个有趣的例，即例 10.1 和例 10.2. 在证明过程中，我们让 x 对应于一个无穷序列，并提到这种方法叫做符号动力系统方法. 现在，我们从更一般的观点介绍符号动力系统，并指出例 10.1 和例 10.2 中介绍的函数具有更为丰富深刻的性质——混沌现象. 而符号动力系统，正是动力系统研究中揭示在某个映射迭代下会出现混沌现象的有力工具.

首先引入一个集合，作为要考虑的映射的定义域.

定义 21.1　记 Σ_2 为由两个符号 0 与 1 所构成的无穷序列的全体组成之集合，即

$$\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \mid s_j = 0 \text{ 或 } 1\} \tag{21.1}$$

称 Σ_2 为两个符号 $\{0,1\}$ 上的序列空间.

一般说来，我们可以考虑 k 个符号 $\{0,1,\cdots,k-1\}$ 上的序列空间 Σ_k. 还可以考虑双向无穷序列的集合

$$\Sigma_2^* = \{s = (\cdots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 s_2 \cdots)\ s_j = 0 \text{ 或 } 1\} \tag{21.2}$$

但只要把 Σ_2 上的符号动力系统弄清楚了，进一步推广是不困难的.

为了考虑拓扑性质，在序列空间 Σ_2 上引进度量是一个最方便的办法. 设 t 和 s 是 Σ_2 中任意两个元素.

$$t = (t_0 t_1 t_2 \cdots),\ s = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \tag{21.3}$$

定义 t 与 s 之间的距离为

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \tag{21.4}$$

由于$|s_i - t_i| \leqslant 1$，故上式中的无穷级数收敛，而且其和小于或等于2. 显然有

命题 21.2 由(21.4)给出的距离d是Σ_2上的一个度量. 也就是说$d[s,t]$满足

(i) $d[s,t] \geqslant 0$，且等式仅当$s=t$时成立，

(ii) $d[s,t] = d[t,s]$

(iii) $d[s,r] + d[r,t] \geqslant d[s,t]$

命题 21.1 的证明是平凡的，从略. 有了度量，便可以考虑Σ_2中的开集，闭集，极限，连续性等概念了.

命题 21.3 设s,t是Σ_2中的两个元素，则s与t的前$n+1$项相同时(即对$i=0,1,\cdots,n$有$s_i=t_i$)有$d[s,t] \leqslant \frac{1}{2^n}$；反之，若$d[s,t] < \frac{1}{2^n}$，则$s$与$t$的前$n+1$项相同.

证明 若对$i \leqslant n$有$s_i = t_i$，则

$$d[s,t] = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} \tag{21.5}$$

反之，若对某个$j \leqslant n$有$s_j \neq t_j$，则

$$d[s,t] \geqslant \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geqslant \frac{1}{2^n} \tag{21.6}$$

这证明了所要之结论. 证毕.

上述命题表明，Σ_2中两个元素很接近，意味着它们的前面相当多项是一致的. 这一事实以下将反复用到. 现在，我们引进符号动力系统中最重要的运算——移位映射.

定义 21.4 设映射$\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$由

$$\sigma(s) = s_1 s_2 s_3 \cdots (\text{当 } s = s_0 s_1 s_2 \cdots) \tag{21.7}$$

给出；σ 叫做 Σ_2 上的移位映射.

显然，σ 是 2 对 1 的映射，它的值域仍是 Σ_2，并且有

命题 21.5 移位映射 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 在 Σ_2 上连续.

证明 对任一点 $s=(s_0s_1s_2\cdots)\in\Sigma_2$ 和任给的 $\varepsilon>0$，取 n 使 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 令 $\sigma=\frac{1}{2^{n+1}}$. 于是当 $t=(t_0t_1t_2\cdots)$满足条件 $d[s,t]<\sigma$ 时，由命题 21.3，对 $i=0,1,\cdots,n+1$ 有 $t_i=s_i$，于是 $\sigma(t)$与 $\sigma(s)$的前 $n+1$ 项完全一样. 由命题 21.3，我们有 $d[\sigma(s),\sigma(t)]\leqslant\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 证毕

移位映射的最大好处，是容易直接看出它的周期点. 如果序列 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$具有长为 m 的循环节，即满足

$$s_{t+m}=s_t(t=0,1,2\cdots) \tag{21.8}$$

则称 s 为循环列. 我们用循环小数的标记法记循环列：

$$\begin{cases} s=(\dot{s}_0s_1\cdots\dot{s}_{m-1}) & \text{表示对 } t=0,1,2\cdots \text{ 有 } s_{m+t}=s_t \\ s=(s_0s_1\cdots s_{k-1}\dot{s}_ks_{k+1}\cdots\dot{s}_{k+m-1}) & \text{表示对 } t\geqslant k \text{ 有 } s_{m+t}=s_t \end{cases} \tag{21.9}$$

于是显然有：

命题 21.6 当且仅当 $s=(\dot{s}_0s_1\cdots\dot{s}_{m-1})$时，即 s 为具有长为 m 的循环节的循环列时，有 $\sigma^m(s)=s$. 如果 s 是 σ 的 m—周期点，则 m 必为 s 的最短循环节的长度.

从上述几个命题，可以得到移位映射 σ 的一系列有趣的性质：

定理 21.7 移位映射 $\sigma:\Sigma_2\to\Sigma_2$ 具有下列性质：

1° 满足 $\sigma^m(s)=s$ 的元素恰有 2^m 个.

2° σ 的 n-周期点不少于 2^{n-1}个. 对于素数 p，σ 的 p^k-周期点恰为 $2^{p^k}-2^{p^{k-1}}$个.

3° 设 σ 的 n—周期点个数为 P_n，则

$$P_n = 2^n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} P_d \tag{21.10}$$

4° σ 的周期点之集在 Σ_2 中稠密.

5° σ 有在 Σ_2 中稠密的轨道. 即有 s^* 使 $\{\sigma^n(s^*)\}$ 在 Σ_2 中稠密. 这种 s^* 在 Σ_2 中稠密，而且不可数.

6° 对于任意两点 $s,t\in\Sigma_2$，或者有自然数 m 使得 $\sigma^m(s)=\sigma^m(t)$，或者有一个无穷的自然数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使 $d[\sigma^{n_k}(s),\sigma^{n_k}(t)]\geqslant 1$.

7° 在 Σ_2 中有不可数子集 S，满足下列三个条件：

(i) 对任两点 $s,t\in S$，都不会有

$$\lim_{n\to+\infty} d[\sigma^n(s),\sigma^n(t)] = 0 \tag{21.11}$$

(ii) 对任两点 $s,t\in S$，都有一串自然数 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使

$$\lim_{k\to+\infty} d[\sigma^{n_k}(s),\sigma^{n_k}(t)] = 0 \tag{21.12}$$

(iii) 对任意 $s\in S$ 和 σ 的任一周期点 p，都不会有

$$\lim_{n\to+\infty} d[\sigma^n(s),\sigma^n(p)] = 0 \tag{21.13}$$

证明 性质 1°是命题 21.6 的直接推论. 因为由 0 与 1 组成的长为 m 的序列恰有 2^m 个. 由性质 1°立刻得到性质 2°与性质 3°，这不过是排列组合的简单计数问题.

性质 4°：只要指出，对任给的 $\varepsilon>0$ 和任一点 $s\in\Sigma_2$，有 σ 的周期点 t，使 $d[s,t]<\varepsilon$ 即可. 取 n 使 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，再令 $t=(\dot{s}_0s_1\cdots\dot{s}_n)$，则 t 是 σ 的周期点，而且 $d[s,t]\leqslant\frac{1}{2^n}<\varepsilon$.

性质 5°：每个整数 $n>1$ 在二进位制下可以表成由 0 与 1 组成的有限列，把这个有限列的头一项(即最左边的那个 1)去掉，得到一个由 0 与 1 组成的列. 设由整数 $n+1$ 这样得到的 $0-1$ 列记作

L_n，则在$\{L_n\}$中包含了由 0 与 1 组成的所有可能的有限长度的序列. 对应于每个 Σ_2 中的元素 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$和 n，作序列

$$L(s,n) = (L_ns_0L_1s_1L_2s_2\cdots L_ks_k\cdots) \tag{21.14}$$

记 $s^*(n)=L(s,n)$. 我们指出 s^* 具有 5°所要求的性质.

首先，$\{s^*\}$不可数. 事实上，仅$\{L(s,1)\}$就是不可数的. 因为对不同的 s，对应的 $L(s,1)$显然不同，故$\{L(s,1)\}$中元素个数不比 Σ_2 少，因而不可数.

其次，任给 $t=(t_0t_1t_2\cdots)\in\Sigma_2$ 和 $\varepsilon>0$，可取 m 使有$\frac{1}{2^m}<\varepsilon$. 由于$\{L_n\}$中包含了由 0 与 1 组成的所有可能的有限长度的序列，故有 n 使 $L_n=t_0t_1\cdots t_m$. 由(21.14)及命题 21.3，可知(对任一个 s)总有 $d[t,L(s,n)]\leqslant\frac{1}{2^m}<\varepsilon$，可见$\{L(s,n)\}$在 Σ_2 中稠密.

最后证明，对任一个 s 和 n，σ 的过 $s^*(n)=L(s,n)$的轨道在 Σ_2 中稠. 这是因为，对任给的 $t=(t_0t_1t_2\cdots)$和 $\varepsilon>0$，可取 m 使$\frac{1}{2^m}<\varepsilon$. 设 p 是这样的自然数使 $L_p=(t_0t_1\cdots t_m)$，且序列 $L_ns_0L_1s_1L_2s_2\cdots L_{p-1}s_{p-1}$ 的长度为 k，则有

$$\sigma^k(L(s,n)) = (L_ps_pL_{p+1}S_{p+1}\cdots) = (t_0t_1\cdots t_ms_pL_{p+1}\cdots) \tag{21.15}$$

于是由命题 21.3 可知，$d[t,\sigma^k(L(s,n))]\leqslant\frac{1}{2^m}<\varepsilon$，这表明 σ 的过 $L(s,n)$的轨道在 Σ_2 中稠.

性质 6°：若有 m 使对一切 $n\geqslant m$ 有 $t_n=s_n$，则当 $n\geqslant m$ 时，由于

$$\begin{cases}\sigma^n(s) = (s_ns_{n+1}s_{n+2}\cdots)\\ \sigma^n(t) = (t_nt_{n+1}t_{n+2}\cdots)\end{cases} \tag{21.16}$$

即得 $\sigma^n(s)=\sigma^n(t)$. 若没有这样的 m，则有正整数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使 $s_{n_k}\neq t_{n_k}$，即$|s_{n_k}-t_{n_k}|=1$ 于是

$$d[\sigma^{n_k}(s),\sigma^{n_k}(t)] = |s_{n_k} - t_{n_k}| + \frac{|s_{n_k+1} - t_{n_k+1}|}{2} + \cdots \geqslant 1 \tag{21.17}$$

性质 6°获证.

性质 7°:设 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$是 Σ_2 中任一点,作序列

$$Q(s) = (s_0 0 s_0 s_1 11 s_0 s_1 s_2 000 s_0 s_1 s_2 s_3 1111\cdots) \tag{21.18}$$

这里 $Q(s)$的构造方法严格说来是

$$\begin{cases} Q(s) = (Q_0Q_1Q_2\cdots Q_n\cdots), Q_n = Q_n(s) \\ Q_n = s_0s_1\cdots s_{2n} \underbrace{00\cdots0}_{2n个} s_0s_1\cdots s_{2n+1} \underbrace{11\cdots1}_{2n+1个} \end{cases} \tag{21.19}$$

所有这样的 $Q(s)$组成集合 S,则 S 具有性质 7°.

首先,若 $s\neq t$,则 $Q(s)\neq Q(t)$,故$\{Q(s)\}$中之素与 Σ_2 中元素一样多,因而$\{Q(s)\}$不可数.

设 $t\neq s$,则至少有一个 k,使 $s_k\neq t_k$. 由(21.19)可知,当 $2n\geqslant k$ 时,$Q_n(s)$与 $Q_n(t)$不同. 由性质 6°可知,有 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,使 $d[\sigma^{n_k}(Q(s)),\sigma^{n_k}(Q(t))]\geqslant 1$. 这证明了 7°之(i).

另一方面,由(21.19)可知,若序列 $Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}s_0s_1\cdots s_{2n}$之长为 k_n,则 $\sigma^{k_n}(Q(s))$与 $\sigma^{k_n}(Q(t))$的开始 $2n$ 项是一致的. 由命题 21.3 可知,$d[\sigma^{k_n}(Q(s)),\sigma^{k_n}(Q(t))]\leqslant\frac{1}{2^n}$,这证明了 7°之(ii). 最后,由于 $Q(s)$中含有任意长的 00…0 段和 11…1 段,它和任一个循环列都有无穷多对应项不同,故不会有(21.13)这证明了 7°之(iii). 定理 21.7 证毕.

从上述定理可见,Σ_2 上的移位映射 σ 具有丰富的有趣性质. 它不仅像例 10.1 和 10.2 中已指出的那样有稠密的周期点集,而且有稠密的轨道. Σ_2 中的点在 σ 的作用下,呈现出似乎是一片混乱的运动状态. 从任一点邻域,都可以找到这样的点,它的轨道能

进入其他任一点邻域. 在 Σ_2 中有这样的不可数点集,其中任意两点在 σ 的作用下,可以一再地任意靠近,又一再地拉开距离,且完全不具有周期性. 在完全确定的映射 σ 作用之下,出现了类似于随机过程的状态. 这种现象被人们叫做混沌现象. 混沌现象可能出现于物理、化学、生物等许多领域所遇到的数学问题的讨论之中,因而引起了科学家们的广泛兴趣. 有人猜想. 它可能与一些十分难于理解的自然现象——如湍流——有关. 近十几年来,各个领域的学者们,从不同的角度,对混沌现象作了大量研究.

但是,究竟什么叫混沌,却还没有一致的严格的定义. 在 1975 年《美国数学月刊》(Amer. Math. Monthly, 82(1975)985, 作者 Li. T. Y 和 Yorke. J. A.)上发表的一篇短文《周期 3 蕴含着混沌》,第一次引入了"混沌"概念(英文原文为 Chaos). 该文提出,对于闭区间上的连续函数 $f(x)$,如果满足下列条件,便称它有混沌现象.

(A) f 的周期点的周期无上界,

(B) f 的定义域包含有不可数子集 S,使得

(i)对任意两点 $x,y\in S$,都不会有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f^n(x)-f^n(y))=0$

(ii)对任意两点 $x,y\in S$,都有 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,使 $\lim\limits_{k\to+\infty}(f^{n_k}(x)-f^{n_k}(y))=0$,

(iii)对任意 $x\in S$ 和 f 的任一周期点 y,都不会有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f^n(x)-f^n(y))=0$.

注意到对实数而言 $|x-y|$ 可以看作度量,可以认为 Σ_2 上的移位映射 σ 满足这里的条件(A)与(B). 事实上,(A)是定理 21.7 之 2°的推论,而(B)相当于定理 21.7 中性质 7°.

人们还用其他方式来定义或描述混沌现象. 不同的定义从不同的角度看问题,但本质上是一致的,尽管逻辑上并不一定等价.

我们认为采用下面的定义更直观，更易于理解.

定义 21.8 设 V 是一个度量空间. 映射 $f:V\to V$ 如果满足下列三个条件，便称 f 在 V 上混沌.

1. 对初值的敏感依赖性：存在 $\delta>0$，使得对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $x\in V$，都有 $y\in V$ 和 $n\geqslant 0$，使满足 $d(x,y)<\varepsilon$ 和 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$；

2. 拓扑可迁性(*Topologically transitive*)：对 V 中的任一对开集 X，Y，存在 $k>0$，使 $f^k(X)\cap Y\neq\Phi$.

3. f 的周期点集在 V 中稠密.

让我们仔细分析一下这三条的意义. 对初值的敏感依赖性，意味着无论 x 和 y 离得多么近. 在 f 作用之下两者的轨道都可能分开至少 δ 那么大的距离. 而且在每个点 x 附近，都可找到离它很近而在 f 作用下终于分道扬镳的点 y. 对这样的 f，如果用计算机计算它的轨道，任何微小的初始误差，经过若干次迭代后都将导致计算结果的无效. 例如，对于 Σ_2 上的移位映射 σ 而言，如果我们仅仅知道 s 的前 $n+1$ 项(准确到 $\frac{1}{2^n}$)，则我们对 $\sigma^{n+1}(s)$ 将一无所知.

拓扑可迁性，意味着任一点的邻域在 f 的不断作用之下将“撒遍”整个度量空间 V，这意味着 f 不可能分解为 V 的任何两个包含开子集而不相交的子集上的自映射. 这两条一般说来是随机系统的特征，但第三条——周期点集的稠密性，却又表明系统具有很强的确定性与规律性，决非一片混乱. 形似紊乱而实则有序，这正是混沌的耐人寻味之处.

显然，Σ_2 上的移位映射符合定义 21.8. 事实上，由定理 21.7 之 4°可知，周期点稠密. 由定理 21.7 之 5°，即稠密轨道的存在，可推出拓扑可迁性. 至于对初值的敏感依赖，则可由定理 21.7 之 6°推出. 这是因为，对给定的 s，与它只有前 m 项不同的点(即使

$\sigma^m(t)=\sigma^m(s)$的点 t)不超过 2^m 个，因而 s 的任一邻域中，对绝大多数的点 t 可找到 $n_1<n_2\cdots<n_k<\cdots$，使 $d|\sigma^{n_k}(t),\sigma^{n_k}(s)|\geqslant 1$. 所以可以说，移位映射 σ 在 Σ_2 上混沌.

符号动力系统中的移位映射(在 Σ_k 上，或在双向无穷序列空间 Σ_k^* 上)，是典型的混沌映射. 不管采用哪种混沌定义，它都是混沌的. 要证明某个映射 f 在它的定义域的某子集 V 上混沌，最有力的方法是证明 f 在 V 上和某个序列空间上的移位映射拓扑共轭. 例如，在例 10.2 中，找到了马蹄映射 h 的一个不变子集 $\Omega(h)$ 并对每个 $x\in\Omega(h)$，给出了序列 $I(x)$，这实际上是建立了 $\Omega(h)$ 到 Σ_2 的同胚. 而且那里实际上证明了同胚 $I:\Omega(h)\to\Sigma_2$ 满足 $I\circ h=\sigma\circ I$，即 h 在 $\Omega(h)$ 上与 Σ_2 上的移位映射 σ 拓扑共轭. 于是马上知道，h 在 $\Omega(h)$ 上具有定理 21.7 所述的一系列性质.

应用这种建立与 Σ_2 上的移位映射拓扑共轭的方法，我们能证明二次函数 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 当 $\mu>4$ 时，有混沌现象. 但由于 $|g'_\mu(x)|$ 在集合 $\{x\,|\,0\leqslant g_\mu(x)\leqslant 1\}$ 上不一定小于 1，不像 $\mu>2+\sqrt{5}$ 时那么容易地建立 g_μ 在一个康托集上与 Σ_2 上的移位映射拓扑共轭. 下面要再引入一个工具——西瓦兹导数. 它是一维动力系统研究中很有用的概念. 借助于这个工具，我们将对 $g_\mu(x)$ 作更深入的研究.

不过，靠某些特殊技巧，现在也能证明 $g_\mu(x)$ 当 $\mu=4$ 时在[0，1]上混沌：

定理 21.9　令 $g(x)=g_4(x)=4x(1-x)$，则 $g(x)$ 在[0，1]上混沌.

证明　取 $h_1(x)=\frac{1}{2}(1-x)$，则 $h_1^{-1}(x)=1-2x$. 作拓扑共轭变换

$$q(x) = h_1^{-1} \circ g \circ h_1(x) = 1 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}(1-x)(1-\frac{1}{2}(1-x))$$

$$= 1 - 2(1-x^2) = 2x^2 - 1 \quad (x \in [-1,1]) \tag{21.20}$$

再令

$$h_2(x) = \cos x \quad (x \in [0,\pi]) \tag{21.21}$$

则 $h_2^{-1}(x) = \arccos x$，且 h_2^{-1} 取值于 $[0,\pi]$. 再作拓扑共轭变换

$$f(x) = h_2^{-1} \circ q \circ h_2(x) = h_2^{-1}(2\cos^2 x - 1)$$

$$= h_2^{-1}(\cos 2x) \quad (x \in [0,\pi]) \tag{21.22}$$

注意到 $h_2(x)$ 仅仅当 $x \in [0,\pi]$ 时才有意义，故不能简单地认为 $\cos 2x = h_2(2x)$. 事实上，有：

$$\cos 2x = \begin{cases} h_2(2x) & (x \in [0,\frac{\pi}{2}]) \\ h_2(2(\pi - x)) & (x \in [\frac{\pi}{2},\pi]) \end{cases} \tag{21.23}$$

代入(21.22)得

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \in [0,\frac{\pi}{2}]) \\ 2(\pi - x) & (x \in [\frac{\pi}{2},\pi]) \end{cases} \tag{21.24}$$

再作变换，取 $h_3(x) = \pi x, h_3^{-1} = \frac{x}{\pi}$. 令

$$\varphi(x) = h_3^{-1} \circ f \circ h_3(x) = \begin{cases} 2x & (x \in [0,\frac{1}{2}]) \\ 2(1-x) & (x \in [\frac{1}{2},1]) \end{cases} \tag{21.25}$$

这样，我们证明了 $g(x)$ 与分段线性函数 $\varphi(x)$ 拓扑共轭. 这个 $\varphi(x)$ 正是 § 10 中例 10.1 所讨论过的函数. 读者不难利用 x 的二进表示，证明 $\varphi(x)$ 的混沌性，从而得到 $g(x)$ 的混沌性.

§22　西瓦兹导数的应用

西瓦兹导数本是复变函数研究中的一个工具．它被引入一维动力系中之后，又发挥了重要作用．

定义 22.1　若函数 f 有 3 阶导数，则可定义其西瓦兹导数

$$Sf(x)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \tag{22.1}$$

当 $f'(x)=0$ 时，$Sf(x)$ 可以取值为 $+\infty$ 或 $-\infty$．

具有负的西瓦兹导数的函数，在一维动力系中特别重要．不难算出，我们有 $Sg_\mu(x)=-6(1-2x)^2<0$，$S(e^x)=-\frac{1}{2}<0$，$S(\sin x)=-(1+\frac{3}{2}(\operatorname{tg}x)^2)<0$，等等．一般地，有

命题 22.2　设 $P(x)$ 是多项式．如果 $P'(x)$ 的所有根都是实的而且两两不同，则 $SP<0$．

证明　设 $P'(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_N)$，这里 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 是两两不同的实数．则

$$P''(x)=\sum_{j=1}^{N}\prod_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N}(x-a_i) \tag{22.2}$$

$$P'''(x)=\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{N}\prod_{\substack{(i\neq j)\\(i\neq k)}}{}_{i=1}^{N}(x-a_i) \tag{22.3}$$

于是得

$$\begin{aligned}SP(x)&=\sum_{j\neq k}\frac{1}{(x-a_j)(x-a_k)}-\frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x-a_j}\right)^2\\&=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{x-a_j}\right)^2-\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x-a_j}\right)^2<0\end{aligned} \tag{22.4}$$

证毕.

具有负西瓦兹导数的函数,还有一个对我们十分有用的优点,它们的复合仍具有负西瓦兹导数.

命题 22.23　若 $Sf<0$,$Sg<0$,则 $S(f\circ g)<0$.

证明　利用求导法则得

$$(f\circ g)''=f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))\cdot g''(x) \tag{22.5}$$

$$(f\circ g)'''(x)=f'''(g(x))\cdot(g'(x))^3+3f''(g(x))\cdot g''(x)\cdot g'(x)+f'(g(x))\cdot g'''(x) \tag{22.6}$$

由此可得

$$S(f\circ g)(x)=Sf(g(x))\cdot(g'(x))^2+Sg(x) \tag{22.7}$$

从而可知,由 $Sf<0$ 及 $Sg<0$ 得 $S(f\circ g)(x)<0$. 证毕.

作为上述命题的直接推论,若 $Sf<0$,则 $Sf^n<0$. 这才是我们关心的事. 下面我们进一步弄清,若 $Sf<0$,f 有什么好的性质.

命题 22.4　若 $Sf<0$,则 $f'(x)$没有正的局部极小,也没有负的局部极大.

证明　设 x_0 是 $f'(x)$的一个驻点,$f''(x_0)=0$. 于是由 Sf 之定义得 $Sf(x_0)=f'''(x_0)/f'(x_0)=0$. 从而 $f'''(x_0)$与 $f'(x_0)$有相反的符号. 若 $f'(x_0)>0$,则由 $f'''(x_0)<0$ 可知,f' 在 x_0 不会取到极小. 若 $f'(x_0)<0$,则由 $f'''(x_0)>0$ 可知,f' 在 x_0 不会取到极大. 证毕.

命题 22.5　若 $f(x)$具有有限多个驻点且 $Sf<0$,则对任意正整数 m,$f(x)$只有有限多个 m-周期点.

证明　利用复合函数求导公式,易知 f^m 也只有有限多个驻点. 记 $g(x)=f^m(x)$,则 f 的 m—周期点都是 g 的不动点. 又由命题 22.3 知,$Sg<0$.

由于 $g=f^m$ 只有有限个驻点,这些驻点把 g 的定义区间分成

有限多个子区间. 每个子区间内均有 $g'(x)\neq 0$. 我们指出,在每个这样的子区间 I 上,至多有 g 的 3 个不动点. 否则若 I 上有 4 个 g 的不动点 x_1,x_2,x_3,x_4. 则由中值定理,必有 $c_1\in(x_1,x_2)$ 及 $c_2\in(x_3,x_4)$,使 $g'(c_1)=g'(c_2)=1$. 由于 $g'(x)$ 在 I 上不为零,故在 I 上恒有 $g'(x)>0$. 由于 $Sg<0$,由命题 22.4,$g'(x)$ 在 (c_1,c_2) 内没有正的局部极小,故在任一点 $x\in(c_1,c_2)$ 处均有 $g'(x)\geqslant 1$,即 $(g(x)-x)'\geqslant 0$. 但是,在任何 (c_1,c_2) 的子区间 Δ 上不可能有 $(g(x)-x)'=0$(因为在 Δ 上 $g'(x)$ 恒为 1 将导出 $Sg=0$,与 $Sg<0$ 矛盾). 故 $g(x)-x$ 在 (c_1,c_2) 上严格递增. 于是 g 在 (c_1,c_2) 内至多有一个不动点. 引出矛盾. 故 g 只有有限多个不动点,即 f 只有有限多个 m—周期点. 证毕.

在 §19 中我们曾引入吸引周期点的概念. 若 p 是 f 的 m—周期点,如果 p 作为 f^m 的不动点是吸引的(或半边吸引的),则称 p 是 f 的吸引(或半边吸引)周期点. 这时,满足条件 $\lim\limits_{i\to+\infty} f^{mi}(x)=p$ 的点 x 所成之集叫做 p 的稳定集. p 的稳定集中,包含 p 点的最大连通分支叫做 p 的稳定邻域. 半边吸引的周期点 p,其稳定邻域以 p 为一端点. 双边吸引的周期点 p,如果 f 的定义域的边界点不是其稳定邻域的边界点,则稳定邻域是开区间.

本节的一个重要结果是:

定理 22.6　设 f 定义于区间 I 上,f 有 3 阶导数并且 $Sf<0$;p 是 f 的吸引或半边吸引周期点,其稳定邻域的边界点不含 I 的边界点. 则包含 p 的周期轨中至少有一个周期点 $p^*=f^k(p)$(k 是某个非负整数),p^* 的稳定邻域中含有 f 的驻点. 因此,若 f 有 n 个驻点,则 f 至多有 $n+2$ 个吸引周期轨.

证明　设 p 是 f 的 m 周期点,记 $g=f^m$,则 p 是 g 的吸引不动点. 设 $W(p)$ 是 p 作为 f 的周期点的稳定邻域,则 p 作为 g 的不动

点，稳定邻域仍是 $W(p)$. 先考虑 p 是双边吸引的情形. 由于 $W(p)$ 的边界不含 I 的端点，故 $W(p)$ 是开区间. 记 $W(p)=(l,r)$. 由于在 g 作用下，$W(p)$ 变为 $W(p)$，有三种情形

$$
\begin{aligned}
&1.\quad g(l)=l \text{ 且 } g(r)=r,\\
&2.\quad g(l)=r \text{ 且 } g(r)=l,\\
&3.\quad g(l)=g(r).
\end{aligned}
\tag{22.8}
$$

对情形 1. 由中值定理可知，有 a,b 使 $l<a<p<b<r$，且 $g'(a)=g'(b)=1$. 由于 $Sg<0$，由命题 22・4，g 在 (a,b) 内不能有正的局部极小，但又因 $p\in(a,b)$ 的吸引性，$g'(x)$ 在 (a,b) 内至少有一点处小于 1. 故 $g'(x)$ 在 (a,b) 上的最小值非正，从而 g 在 (a,b) 内至少有一个驻点.

对情形 2，可考虑 $g(g(x))=G(x)$，则 $G(l)=l$ 且 $G(r)=r$，于是化为情形 1.

对情形 3. $g(x)$ 在 (l,r) 内显然至少有一个驻点. 如果 p 是半边吸引的，则必有 $f'(p)=1$，且 p 是 $W(p)$ 的一个端点. 不失一般性，设 $W(p)=[p,r)$. 这时，只有两种情形：或者 $g(r)=p$，或者 $g(r)=r$. 若 $g(r)=p$，则 g 在 $[p,r)$ 内显然有至少一个驻点. 若 $g(r)=r$，则 r 不可能是双边吸引的不动点，故 $|g'(r)|\geqslant 1$. 若 $g'(r)<0$，$[p,r)$ 内当然有驻点. 剩下只要考虑 $g'(r)\geqslant 1$ 的情形. 由于 p 是右吸引的，$g'(x)$ 在 $[p,r)$ 内不能处处大于或等于 1，故必有局部极小. 但因 $Sg<0$，$g'(x)$ 不能有正的局部极小，故 $[p,r)$ 内有驻点. 总之，$W(p)$ 内必有 g 的驻点. 设此驻点为 z_0，则有

$$
g'(z_0)=(f^m(z_0))'=f'(z_{m-1})f'(z_{m-2})\cdots f'(z_1)f'(z_0)=0
\tag{22.9}
$$

这里 $z_k=f^k(z_0)$，$k=0,1,\cdots,m-1$. 于是有 k，使 $f'(z_k)=0$. 设周期点 $p_k=f^k(p)$ 的稳定邻域是 $W(p_k)$，易知 $z_k\in W(p_k)$. 即 f 的每个吸

引周期轨的稳定邻域若不与 I 的边界点邻接，就必然包含 f 的驻点. 但与 I 的边界邻接的周期轨吸引邻域至多有两个，故吸引周期轨的数目至多比驻点数多 2. 证毕.

根据这个定理可知，二次函数 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 至多有 3 个吸引周期轨. 实际上，下面指出，它至多只有一个吸引周期轨. 如果它的唯一的驻点在 g_μ 作用下，向无穷远处逃逸或变为排斥周期点，因而不被吸引周期轨所吸引，则连一个吸引周期轨也不可能有了. 我们已经知道，当 μ 较大时（如 $\mu>2+\sqrt{5}$），g_μ 有无穷多周期点. 但它的吸引周期点如此之少，这确是有趣的.

这个定理可以简单地表述为：若 f 有负的西瓦兹导数，则它的每个"内部"的吸引周期轨至少吸引 f 的一个驻点. 这里，"内部"指其稳定邻域不与定义域边界接触. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上令 $A(x)=\lambda\operatorname{arctg}x$，取 $\lambda>1$，则 $SA(x)<0$. 易检验 $A(x)$ 没有驻点，但却有两个吸引不动点. 这因为不动点稳定邻域接触了边界 $\pm\infty$. 这表明"内部"这个条件不可去掉.

下面的推论使我们对二次函数的迭代了解得更清楚.

推论 22.7 对于 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$，对每个 μ 至多有一个吸引周期轨（不算 $x=-\infty$ 这个无穷不动点）.

证明 由命题 22・2 可知，$Sg_\mu<0$. 此外，当 $|x|$ 足够大时，有 $|g_\mu^n(x)|\to\infty$，故每个吸引周期轨所吸引的邻域均为有界. 这表明 g_μ 的吸引周期轨个数不比驻点个数多. 证毕.

在前一节中，我们使用特殊的拓扑共轭技巧，证明了 g_μ 当 $\mu=4$ 时，与例 10.1 中的分段线性函数 $\psi(x)$ 拓扑共轭，从而肯定了它在 $[0,1]$ 上的混沌性质. 现在，我们可以用更一般的方法来处理这个问题. 这里的一般方法允许我们把这个结果推广到一大批类似

于 g_μ 的函数. 设 $g=g_4=4x(1-x)$. 验算易知, g 有排斥不动点 $p=\frac{3}{4}$. 令 $\hat{p}=\frac{1}{4}$, 则 $g(\hat{p})=p$. 记 $[\hat{p},p)=J$, 并令 $R(x)$ 为 J 上的"首次回复映射", 即

$$R(x)=g^n(x)\quad(x\in J, n\text{ 是使 }g^n(x)\in J\text{ 的最小正整数})\tag{22.10}$$

注意到 $g(J)=[\frac{3}{4},1]$, 可见当 $x\in J$ 时, $g(x)\notin J$. 但又有 $g([\frac{3}{4},1])=[0,\frac{3}{4}]$, 故 g^2 把 J 中的某些点又映回 J 中. 事实上, 在 J 内有两点 $\hat{q}$、q, $\hat{p}<\hat{q}<\frac{1}{2}<q<p$, 使有 $g(\hat{q})=g(q)$, 且 $g^2(\hat{q})=g^2(q)=\frac{1}{4}$. 从而 g^2 把 $\hat{I}_2=(\hat{p},\hat{q}]$ 和 $I_2=[q,p)$ 都同胚地映成 J. 按定义(22.10), 当 $x\in\hat{I}_2\cup I_2$ 时, $R(x)=g^2(x)$.

若 $x\in\hat{I}_2\cup I_2$, 则 $g^2(x)\in[0,\frac{1}{4})$. 因为 g 在 $[0,\frac{1}{4})$ 上递增并且 $g([0,\frac{1}{4}))=[0,\frac{3}{4})$, 这表明只要 $x\neq\frac{1}{2}$, 当 $x\in J$ 时, 总有 n 使 $g^n(x)\in J$. 记 $\varphi(x)$ 是使 $g^n(x)\in J$ 的最小正整数, 令

$$\begin{cases}I_n=\{x\in(\frac{1}{2},p)\mid\varphi(x)=n\}\\ \hat{I}_n=\{x\in[\hat{p},\frac{1}{2})\mid\varphi(x)=n\}\end{cases}\tag{22.11}$$

于是, R 是 $J\setminus\{\frac{1}{2}\}$ 到 J 的映射, 且

$$R(x)=g^{\varphi(x)}(x)\qquad(x\in J, x\neq\frac{1}{2})\tag{22.12}$$

关于 $R(x)$, 有下述基本结果:

命题 22.8　对任一个 $x\in J\setminus\{\frac{1}{2}\}$，由(22.10)(或(22.12)给出的 $R(x)$，使 $|R'(x)|>1$.

证明　我们不妨设 $x\in I_k$，因为 $R(x)$ 在 $\hat{I}_k$ 上的图象与 I_k 上的图象关于直线 $x-\frac{1}{2}=0$ 是对称的. 令

$$W_k=\bigcup_{n>k}^{\infty}I_n \tag{22.13}$$

若 $I_k=[l_k,r_k)$，则 $W_k=(\frac{1}{2},l_k)$. 由于 $(g^k(x))'$ 在 I_k 上不为零，又因为 $Sg^k<0$，由命题 22.4，$(g^k(x))'$ 只能在 I_k 的端点取到正的最小值或负的最大值. 于是，只要有 $|(g^k(l_k))'|>1$ 和 $|(g^k(r_k))'|>1$，便知在 I_k 上有 $|(g^k(x))'|>1$.

注意到 g^k 同胚地把 $I_k\cup W_k$ 映成 $(0,p)$，把 I_k 映到 $(\hat{p},p)$. 由于 I_k 的长度小于 $\frac{1}{4}$，故有 $x_k\in I_k$，使 $|(g^k(x_k))'|>1$. 同理，g^k 把 W_k 映成 $(0,\hat{p})$. 但 W_k 的长度也小于 $\frac{1}{4}$，故有 $x'_k\in W_k$，使 $|(g^k(x'_k))'|>1$. 由于 $(g^k(x))'$ 在 (x'_k,x_k) 内不可能有正的极小或负的极大，故 $|(g^k(l_k))'|>1$，因为 $l_k\in(x'_k,x_k)$.

另一方面

$$\begin{aligned}|(g^k(r_k))'|&=|g'(g^{k-1}(r_k))\cdot(g^{k-1}(r_k))'|\\&=|g'(\hat{p})\cdot(g^{k-1}(l_{k-1}))'|>1\end{aligned} \tag{22.14}$$

这因为 $|g'(\hat{p})|>1$. 证毕.

利用这个结果，我们可以建立[0,1]到自身的一个同胚 h，使 $h^{-1}\circ g\circ h(x)=\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 即 § 10 中例 10·1 所给出的分段线性函数. 定义 $h(x)$ 的方法如下：先令 $h(0)=0$，$h(1)=1$，$h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，于是 [0,1] 被分为两个区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$，而 $g(x)$ 把其中每个都同胚地映成 [0,1]. 故有 $x_1\in(0,\frac{1}{2})$ 和 $x_2\in(\frac{1}{2},1)$，使 $g(x_1)=$

$g(x_2)=\frac{1}{2}$. 于是我们可以令 $h(\frac{1}{4})=x_1, h(\frac{3}{4})=x_2$.

设 $h(x)$ 对形如 $\frac{k}{2^n}$ 的 x 都已有了定义($k=0,1,2,\cdots,2^n$)，而且 g^n 把区间 $\left[h\left(\frac{k}{2^n}\right), h\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right]$ 同胚地映成 $[0,1]$，则有唯一的 $c\in\left[h\left(\frac{k}{2^n}\right), h\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right]$，使 $g^n(c)=\frac{1}{2}$. 我们即令 $h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)=c$. 这样归纳地给出了 h 在所有 $[0,1]$ 上的二分有理点处的定义. 显然，h 是严格单调的. 不难验证，在这些点上也确实满是拓扑共轭条件 $h\circ\varphi(x\varphi)=g\circ h(x)$.

事实上，方程 $g^n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $[0,1]$ 上共有 2^n 个根，记它们自小而大顺次为 $r_n(1), r_n(2), \cdots, r_n(2^n)$. 显然有

$$g(r_n(k)) = g(r_n(2^n-k+1)) = r_{n-1}(k) \quad (k=1,2\cdots,2^{n-1}) \tag{22.15}$$

另一方面，按归纳定义可知，h 的定义是

$$h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = r_n(k+1)\ (k=0,1,2,\cdots,2^n-1) \tag{22.16}$$

因而有，当 $k=1,2,\cdots,2^n$ 时，

$$h\circ\varphi\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)=h\circ\varphi\left(\frac{2^{n+1}-(2k-1)}{2^{n+1}}\right)=h\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)$$
$$=r_{n-1}(k)=g(r_n(k))=g\circ h\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \tag{22.17}$$

为了能够把 h 开拓成 $[0,1]$ 上的自同胚而不仅仅在二分有理点有定义，需要而且仅仅需要 h 把 $[0,1]$ 上的二分有理点集映成 $[0,1]$ 上的稠密集. 也就是说，应当证明方程

$$g^n(x) = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{22.18}$$

的根在 $[0,1]$ 上稠密. 我们用反证法证明这一事实. 若不然，有一个区间 A，对 $n=0,1,2,\cdots$, $g^n(A)$ 不含零. 记 $g^n(A)$ 为 A_n，则 g^k 在 A_n 上

为同胚. 易知任一个 Δ_n 均不以 $\hat{p}$ 或 p 为内点，否则将有 k 使 $g^k(\Delta_n)=\Delta_{n+k}$包含零. 因此，若 Δ_n 中有一点在$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$(或$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$)内，就有 $\Delta_n\subset(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$(或 $\Delta_n\subset(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$). 这表明 Δ_n 或者包含于某个 I_k 或 $\hat{I}_k$，或者包含于$(0,\frac{1}{4})$或$(\frac{3}{4},1)$.

设 n_k 是使 Δ_{n_k} 第 k 次进入$(\hat{p},p)$的自然数. 则对于 $x\in\Delta_{n_k}$ 有 $g^{n_{k+1}-n_k}(x)=R(x)$，从而 $|(g^{n_{k+1}-n_k}(x))'|>1$. 由于有 $g^{n_{k+1}-n_k}(\Delta_{n_k})=\Delta_{n_{k+1}}$，这表明 $\Delta_{n_{k+1}}$之长度将大于 Δ_{n_k}之长度. 于是得到一串区间$\{\Delta_{n_k},k=1,2\cdots\}$，它们的长度一个比一个大. 另一方面，可设△是不能再大的，即 Δ 的两端点或者是(22.18)的根，或者是这些根的极限点. 这时，当 $n\neq k$ 时，Δ_n 与 Δ_k 不能有公共部份. 这推出矛盾.

至此，我们从更一般的角度，证明了 $g(x)$与分段线性函数同胚.

检查一下证明过程中所用到的 g 的性质，便可看到，我们实际上证明了更广泛的结果.

定理 22.9 设 $f(x)$定义于$[a,b]$，在$[a,b]$上有 3 阶导数且 $Sf<0$；$f(a)=f(b)=a$. 且有 $c\in(a,b)$，使 $f(c)=b$. $f'(x)$在$[a,c)$上为正，在$(c,b]$上为负，$f'(a)\geqslant1$. 记 f 在(c,b)内的唯一不动点为 p，并设 $\hat{p}\in(a,c)$使 $f(\hat{p})=f(p)=p$. 则当 $\hat{p}-a\geqslant\max\{c-\hat{p},p-c\}$且 $f'(\hat{p})\geqslant1$ 时，$f(x)$与

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x & (x\in[0,\frac{1}{2}])\\ 2(1-x) & (x\in[\frac{1}{2},1])\end{cases}\tag{22.19}$$

拓扑共轭.

为了能用讨论 $g=g_4$ 的方法处理定理 22.9 中的 $f(x)$，我们需

要两个简单的命题：

命题 22.10　设 $f(x)$ 定义于线段 I 上，$[a,b]\subseteq I$，满足：

1°　f 在 $[a,b]$ 上有 3 阶导数，且 $Sf<0$；

2°　当 $x\in I$ 时 $f(x)\in I$，当 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)\in[a,b]$；

3°　$f(a)=f(b)=a$，有 $c\in(a,b)$，使 $f(c)\geqslant b$；

4°　$f'(a)\geqslant 1$，$f'(x)$ 在 $[a,c)$ 上为正，在 $(c,b]$ 上为负.

则有

（Ⅰ）　当 $x\in(a,c]$ 时，$f(x)>x$；

（Ⅱ）　对任一点 $x^*\in(a,f(c)]$，在 $(a,c]$ 上有点列 $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$，使 $f(x_1)=x^*$，$f(x_{n+1})=x_n$，且 $x_n\to a$；

（Ⅲ）　$f(x)$ 在 (a,b) 内没有吸引周期轨；

（Ⅳ）　对任一点 $x^*\in(a,f(c)]$，有点列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，使 $f(x_1)=x^*$，$f(x_{n+1})=x_n$，且 x_n 趋于 f 在 (c,b) 内的唯一不动点 p.

证明　（Ⅰ）用反证法. 设有 $x_0\in(a,c]$，使 $f(x_0)\leqslant x_0$. 由于 $f(c)\geqslant b>c$，故 $x_0<c$. 从 $f(x_0)\leqslant x_0<c<f(c)$，得

$$\frac{f(c)-f(x_0)}{c-x_0}>1 \tag{22.20}$$

由中值定理，有 $\xi\in(x_0,c)$ 使 $f'(\xi)>1$. 由假设 $f'(a)\geqslant 1$ 及 f' 在 $[a,c)$ 上为正，以及由 $Sf<0$ 知，f' 在 (a,ξ) 内无正的极小，可知在 $[a,\xi]$ 上恒有 $f'(x)\geqslant 1$，即 $(f(x)-x)'\geqslant 0$. 于是 $f(x)-x$ 在 $[a,\xi]$ 上不减. 由 $f(a)-a=0$ 及 $f(x_0)-x_0\leqslant 0$，故对一切 $x\in[a,x_0]$，有 $f(x)=x$. 这推出 Sf 在 $[a,x_0]$ 上恒为零，与假设矛盾.

（Ⅱ）考虑 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上的反函数 $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(x)$ 在 $[a,f(c)]$ 上严格递增，有唯一不动点 $x=a$. 对于 $x^*\in(a,f(c)]$，由（Ⅰ），$f(x^*)>x^*$，可得 $x^*>f^{-1}(x^*)$. 取 $f^{-1}(x^*)=x_1$，则由 $x>f^{-1}(x)$ 得 $x_n>f^{-1}(x_n)=x_{n+1}$，显然有 $x_n\to a$.

(Ⅱ)用反证法. 设 f 在(a,b)内有吸引周期轨,由定理 22.6,则此吸引周期轨或者吸引 f 的驻点 c,或者吸引 a 的右半邻域或 b 的左半邻域. 由于 $f(c)\geqslant b$,任意(a,b)内的周期轨不可能吸引 c(因为 $f(c)=b$ 时,有 $f^2(c)=f(b)=a$,然后 $f(a)=a$. 而当 $f(c)>b$ 时,由 2°知 $f^n(c)\notin[a,b]$). 又因为 f 把 b 的左半邻域映成 a 的右半邻域,而在 a 的任意小的右半邻域中,由(Ⅰ),总可找到 x_n,使 $f^n(x_n)=c$. 因而(a,b)内的周期轨不可能吸引 a 或 b 的半邻域. 矛盾.

(Ⅳ)由(Ⅱ)可知,f 在(c,b)内的唯一不动点 p 是排斥不动点. 考虑 f 在$[c,b]$上的反函数 f^{-1}. f^{-1}在$[a,f(c)]$上严格递减. 若 $f^{-2}=f^{-1}(f^{-1})$在$(a,f(c))$上有唯一不动点 p,由定理 5·4 之情形 1,可知,对$(a,f(c))$内任一点 x^*,令 $f^{-n}(x^*)=x_n$,可得 $f(x_{n+1})=x_n$,且 $x_n\to p$. 这是因为 p 是 f 的排斥不动点,从而是 f^{-1}的吸引不动点. 这时(Ⅳ)成立. 若 f^{-2}在$(a,f(c))$内有异于 p 的不动点 q,不妨设 q 与 p 之间无不动点,由 p 是 f^{-2}的吸引不动点可知 q 是 f^{-2}的排斥(或半边排斥)不动点. 于是$\{q,f^{-1}(q)\}$是 f^{-1}的排斥(或半边排斥)周期轨. 从而$\{q,f^{-1}(q)\}$是 f 的吸引(或半边吸引)周期轨. 这与(Ⅲ)矛盾. 证毕.

命题 22.11　设 $f(x)$满足命题 22.10 中诸条件. 记 p 是 f 在$[c,b]$上的唯一不动点,z 是方程 $f(x)=b$ 在$[c,b]$上的唯一解. 而 $\hat{p}$ 和 $\hat{z}$ 则是$[a,c]$上分别满足 $f(\hat{p})=p$ 和 $f(\hat{z})=b$ 的点. 则在(z,p)内有点列 $r_1>r_2>\cdots>r_n>r_{n+1}>\cdots$,使 $r_n\to z$. 对应地,在$(\hat{p},\hat{z})$内有点列 $\hat{r}_1<\hat{r}_2<\cdots<\hat{r}_n<\cdots$,使 $f(\hat{r}_n)=f(r_n)$,$\hat{r}_n\to\hat{z}$. 这些点列满足条件:

$$f(\hat{r}_n)=f(r_n)\in(p,b),(n=1,2,3,\cdots)$$

$$f^2(r_n)<f^3(r_n)<\cdots<f^n(r_n)\in(a,\hat{p}),(n=2,3,\cdots)\qquad(22.21)$$

$$f^3(r_{n+1})=f^2(r_n),f^{n+1}(r_n)=\hat{p},(n=1,2,3,\cdots)$$

如果有

$$\hat{p}-a\geqslant\max\{\hat{z}-\hat{p},p-z\},f'(\hat{p})\geqslant 1 \tag{22.22}$$

则有

$$|(f^{n+2}(x))'|>1(当 x\in[r_{n+1},r_n]\cup[\hat{r}_n,\hat{r}_{n+1}])$$
$$(n=0,1,2,3,\cdots;r_0=p,\hat{r}_0=\hat{p}) \tag{22.23}$$

证明 由命题 22.10 之(ii),对 $x'=\hat{p}\in(a,f(c)]$,在(a,c)内有点列 $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$,使 $x_n\to a$, $f(x_{n+1})=x_n$, $f(x_1)=p$. 设 $\hat{x}_n$ 是$[c,b)$上满足 $f(\hat{x}_n)=f(x_n)$的点,则 $\hat{x}_n\to b$, $\hat{x}_n<\hat{x}_{n+1}$,且 $p<x_1$. 因为 f 同胚地把(z,p)变为(p,b),故有唯一的 r_n,使 $f(r_n)=\hat{x}_n$,且 $r_{n+1}<r_n$, $r_n\to z$. 同时,因 $f(\hat{p})=f(p)$, $f(z)=f(\hat{z})$,且 f 在$(\hat{p},\hat{z})$上严格递增,在(z,p)上严格递减,故在$(\hat{p},\hat{z})$内有唯一的 $\hat{r}_n$,使$f(\hat{r}_n)=f(r_n)$, $\hat{r}_n<\hat{r}_{n+1}$, $\hat{r}_n\to\hat{z}$. 由 x_n, $\hat{x}_n$ 及 r_n, $\hat{r}_n$ 之定义,$f(\hat{r}_n)=f(r_n)=\hat{x}_n$, $f(\hat{x}_n)=f(x_n)$, $f(x_n)=x_{n-1}$, $f^{n-1}(x_n)=x_1$, $f(x_1)=\hat{p}$ 即得(22.21).

由(22.21)可知,f^{n+2}同胚地把$[r_{n+1},r_n]$映为$[\hat{p},p]$,且把$[z,r_{n+1}]$映为$[a,\hat{p}]$. 注意到 $p-\hat{p}>r_n-r_{n+1}$,故有 $e_1\in(r_{n+1},r_n)$,使$(f^{n+2}(e_1))'>1$. 同理,由 $\hat{p}-a>p-z>r_{n+1}-z$,有 $e_2\in(z,r_{n+1})$,使$(f^{n+2}(e_2))'>1$. 因为 $Sf^{n+2}<0$, f^{n+2}在$[e_2,e_1]$内不可能取到局部极小,故对一切 $x\in(e_2,e_1)$,有$(f^{n+2}(x))'>1$. 这表明$(f^{n+2}(r_{n+1}))'>1$. 另一方面,从条件 $f'(\hat{p})\geqslant 1$,得

$$\begin{aligned}(f^{n+2}(r_n))' &= f'(f^{n+1}(r_n))\cdot(f^{n+1}(r_n))' \\ &= f'(\hat{p})\cdot(f^{n+1}(r_n))'>1\end{aligned} \tag{22.24}$$

于是由 $Sf^{n+2}<0$,且 f^{n+2} 是$[r_{n+1},r_n]$到$[\hat{p},p]$的同胚,并用命题 22.1,即知对一切 $x\in[r_{n+1},r_n]$,有$(f^{n+2}(x))'>1$. 同理可证对 $x\in[\hat{r}_n,\hat{r}_{n+1}]$,有$|(f^{n+2}(x))'|>1$. 证毕.

有了命题 22.10 和命题 22.11,读者不难完成定理 22.9 的证明. 对于 $f(c)<b$ 的情形,则有

定理 22.12 设 $f(x)$满足命题 22.10 及命题 22.11 中诸条

件，且 $f(c)>b$，则 f 在 $[a,b]$ 的子集

$$A=\{x\in[a,b]\mid 对一切自然数\ n,f^n(x)\in[a,b]\} \tag{22.25}$$

上，与 Σ_2 上的移位映射 σ 拓扑共轭.

证明 仿§10 中例 10.2 的办法，对每个 $x\in A$ 给出一个由 0 与 1 组成的无穷列

$$s(x)=s_0s_1s_2\cdots \tag{22.26}$$

其中 s_n 这样规定

$$\begin{cases}若\ f^n(x)\in[a,\hat{z}],则令\ s_n=0\\ 若\ f^n(x)\in[z,b],则令\ s_n=1\end{cases} \tag{22.27}$$

这里 z、$\hat{z}$ 的意义如命题 22.11 所述.（如无特别说明，定理 22.12 证明中都将沿用命题 22.10 及命题 22.11 之记号.）

这样，$s: A\to\Sigma_2$ 显然是连续的满映射. 为了证明 s 可逆，在§10 之例 10.2 中，对有关函数 $h(x)$ 的导数加了很强的限制. 应用命题 22.10 及 22.11，对 $f'(x)$ 的要求要弱得多.

要证明 $s(x)$ 可逆，即证明：当 $x_1\neq x_2$ 时，必有 $s(x_1)\neq s(x_2)$. 用反证法. 若有 $x_1\neq x_2$ 使 $s(x_1)=s(x_2)$，则对任意非负整数 n，$f^n(x_1)$ 与 $f^n(x_2)$ 或同属于 $[a,\hat{z}]$，或同属于 $[z,b]$，于是 f^n 在 $[x_1,x_2]$ 上是同胚（这里为确定起见，设 $x_1<x_2$），并且 f^n 把 $[x_1,x_2]$ 映到 $[a,\hat{z}]$，或映到 $[z,b]$.

我们指出，对任意 $x\in[x_1,x_2]$，不可能有 $f^m(x)=a$，也不会有 $f_m(x)=p$. 这是因为由命题 22.10 的结论（Ⅰ）和（Ⅳ），a 的右半邻域或 p 的任一个半邻域在 f 的反复作用下均能覆盖 $[\hat{z},z]$，这与 f 在 $[x_1,x_2]$ 上是同胚矛盾. 设 I 是含 $[x_1,x_2]$，且对任一 m 不含方程 $f^m(x)=a$ 的根及方程 $f^m(x)=p$ 的根的最大的区间. 考虑 I 在 f^n 作用下的像 $I_n=f^n(I)$. 在 I 中任取一点，如 x_1. 显然有无穷多个自然数 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使对每个 n_k，有 $f^{n_k}(x_1)\in(p,\hat{z})\cup(z,p)$；如

其他自然数 n，则有 $f^n(x_1)\notin[\hat{p},p]$. 如果对某个 n_k 有 $f^{n_k}(x_1)\in[r_{n+1},r_n]$ 或 $[\hat{r}_n,\hat{r}_{n+1}]$，则整个 $A_{n_k}\subset[r_{n+1},r_n]$ 或 $[\hat{r}_n,\hat{r}_{n+1}]$. 这是因为 $\hat{r}_n$、r_n 都是方程 $f^{n+2}(x)=p$ 的根，而 A_{n_k} 内不能有这些根之故. 又因为 $f^{n_{k+1}}(x_1)$ 是在 $f^{n_k}(x_1)$ 之后第一次回到 $(\hat{p},p)$ 的，序列 $\{f^m(x_1)\}$ 中的项，即当 $n_k<m<n_{k+1}$ 时，$f^m(x_1)\notin(\hat{p},p)$，故由 r_n 及 $\hat{r}_n$ 之意义可得 $n_{k+1}-n_k=n+2$. 由命题 22.11 可知，

$$(f^{n_{k+1}-n_k}(x))'>1\qquad(\text{当 } x\in A_{n_k})\tag{22.28}$$

由此可见，$A_{n_1},A_{n_2},\cdots,A_{n_k},\cdots$ 这些区间的长度一个比一个大. 但它们显然不能相互重叠(它们都是不含方程 $f^m(x)=a$ 及 $f^m(x)=p$ 的根的最大区间). 这推出矛盾. 就证明了 s 是 A 到 Σ_2 的同胚. 仿例 10.2 易知，$s\circ f=\sigma\circ s$，即 s 是 f 到 σ 的拓扑共轭. 证毕.

顺便指出，A 是康托三分集. 这在 §10 中已提到过.

作为推论，我们得到下面的重要定理.

定理 22.13 当 $\mu>4$ 时，$g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 在 $[0,1]$ 的一个子集 A 上与 Σ_2 上的移位映射 σ 拓扑共轭. 这里 A 是康托完全集，其定义为：

$$A=\{x\in[0,1]\mid 对一切自然数\ n\ 有\ g_\mu^n(x)\in[0,1]\}\tag{22.29}$$

对于一切 $x\notin A$，则 $g_\mu^n(x)\to-\infty$.

证明 只要检验一下 $g_\mu(x)$ 当 $\mu>4$ 时，是否满足定理 22.12 的条件，即命题 22.10 和命题 22.11 的条件.

当 $\mu>4$ 时，g_μ 在 $[0,1]$ 上的最大值点 $c=\dfrac{1}{2}$，而 g_μ 的最大值 $g_\mu(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\mu}{4}>1$. 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 内有唯一不动点 $p=\dfrac{\mu-1}{\mu}$，这时，使 $g_\mu(\hat{p})=g_\mu(p)=p$ 的 $\hat{p}$ 为 $1-p$，即 $\hat{p}=\dfrac{1}{\mu}$. 易算出

$$g_\mu'(0)=\mu>1,\ g_\mu'(p)=2-\mu<-1,\ g_\mu'(\hat{p})=\mu-2>1\tag{22.30}$$

再求出 $g_\mu(x)=1$ 的两个根

$$\hat{z}=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}\right],z=\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}\right].$$

易知

$$\hat{p}-a=\frac{1}{\mu}-0=\frac{1}{\mu}>\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}\right]-\frac{1}{\mu}=p-z=\hat{z}-\hat{p} \tag{22.31}$$

这是因为，当 $\mu>4$ 时

$$\frac{2}{\mu}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}=\frac{2}{\mu}+\frac{1}{2}(1-\frac{4}{\mu})\cdot\left[\sqrt{1-\frac{4}{\mu}}\right]^{-1}$$

$$>\frac{2}{\mu}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{\mu}\right)=\frac{1}{2} \tag{22.32}$$

至于命题 22.10 及命题 22.11 中其他条件，均属平凡. 证毕.

§23 分支理论

我们已经看到，当 $\mu<3$ 时，$g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 的迭代轨道的性状很简单，已被我们了解得一清二楚. 当 $\mu\geqslant 4$ 时，$g_\mu(x)$ 有混沌现象，迭代轨道结构异常复杂. 一个有趣的问题是：随着 μ 的增长，g_μ 的轨道是如何从简单逐渐演变为复杂，而终于出现混沌的呢？

在 §9 中，定理 9.1 描述了这种变化的一般特点，说明了函数族的周期轨道随着最大值的增长，按沙可夫斯基序变得越来越多，越来越复杂. 下面，我们将对这种变化过程，作更细致的讨论.

当 μ 连续变化时，g_μ 也是连续变化的. 若对某个 μ 值，g_μ 是结构稳定的，则对于足够小的 $\varepsilon>0$，对 $\lambda\in(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)$，$g_\lambda$ 与 g_μ 拓扑

共轭，因而迭代轨道的性状不会有本质上的变化. 若 g_μ 不是结构稳定的，则 $g_{\mu-\epsilon}$ 与 $g_{\mu+\epsilon}$ 就可能有本质上的不同. 这叫做分支现象. 可见，分支现象乃是结构稳定的反面.

可以从最一般的观点考虑分支概念，而不与参数相联系. 设 T 是一个拓扑空间，即一个引进了"邻域"概念的集. 在 T 上给了一个等价关系"～"，即对 T 中元素给以分类规则——当且仅当 $t_1 \sim t_2$ 时，认为 t_1 与 t_2 属于同一类. 这时，就可以考虑分支问题. 设 t 是 T 的任一元素，有两种情形：

1° 存在 t 的一个邻域 U，使得对任一个 $t_1 \in U$，总有 $t_1 \sim t$. 这时称 t 为稳定元素.

2° 对于 t 的任一个邻域 U，都有 $t_1 \in U$，使 t_1 与 t 不满足关系 $t_1 \sim t$. 这时称 t 为分支元素.

这表明，分支概念是联系着拓扑关系与等价关系而言的. 我们在本书中讨论的分支问题，基本空间 T 是区间上某些函数的集合，选取的拓扑是由 C^r 度量（§ 20，定义 20. 4）所确定的度量空间的拓扑，通常取 $r=1$ 或 2. 等价关系，就是拓扑共轭关系. 这样选取，是因为我们关心的是函数迭代的动力系性质，即迭代轨道的结构.

本书只考虑单参数函数族的分支问题，这是分支理论的最简单、最易理解一种模型. 以下设

$$f_\lambda(x) = G(x, \lambda) \tag{23. 1}$$

并设 G 关于 x 和 λ 有 r 次连续偏导数（$r \geqslant 1$）. 我们一直关心的 $g_\mu(x) = \mu x(1-x)$ 只是(23. 1)的特例. 下面从几个具体例子入手来引入分支概念.

例 23. 1 （切分支，或鞍点）考虑函数族 $E_\lambda(x) = \lambda e^x$，（$\lambda > 0$）.

图 23.1 的(a)、(b)、(c)分别表示出当 $\lambda<\frac{1}{e}$、$\lambda=\frac{1}{e}$、$\lambda>\frac{1}{e}$时，$y=\lambda e^x$ 图象的变化. 当 $\lambda<\frac{1}{e}$时，$E_\lambda(x)$有两个不动点. 当 $\lambda=\frac{1}{e}$时，两个不动点融合为 1 个. 而当 $\lambda>\frac{1}{e}$时，不动点消失了. 所以称 $\lambda=\frac{1}{e}$为$E_\lambda(x)$的分支值. 由于 $\lambda=\frac{1}{e}$时，曲线 $y=\lambda e^x$ 恰在不动点处与直线 $y=x$ 相切，故这种分支现象叫做切分支(在高维情形，相应的分支点叫鞍点.).

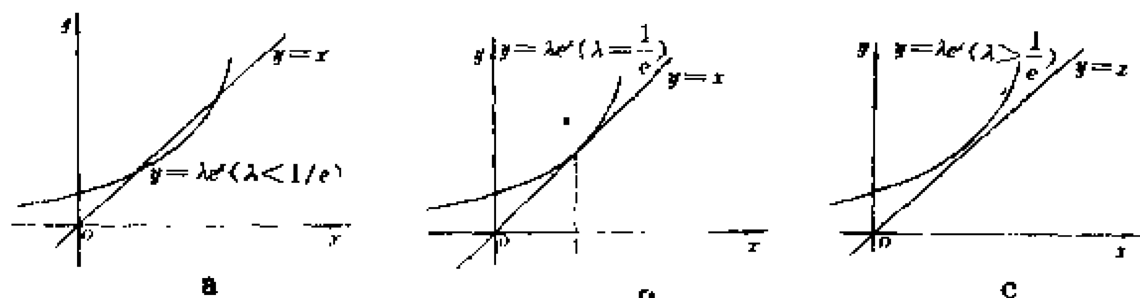


图 23.1

我们在 § 19 中介绍过直观表示迭代过程的蛛网图. 如果仅仅要表示迭代轨道的趋向而不追究具体迭代细节，则往往用“相图”. 迭代函数定义域叫做相空间，每个点 x 都叫相点. 相图上用矢号表示相点在迭代作用之下运动的趋势. 二维情形下，相图特别有用. 图 23.2 是 $E_\lambda(x)=\lambda e^x$ 的迭代轨道的相图. 其中(a)、(b)、(c)与图 23.1 的 a、b、c 相对应.

专用于描述分支现象的还有分支图. $E_\lambda(x)=\lambda e^x$ 的分支图如图 23.3. 在分支图中，横坐标是参数值 λ，纵坐标是不动点 x 的值. 图上表明，$\lambda<\frac{1}{e}$时，有两个不动点，$\lambda=\frac{1}{e}$时，变成一个不动点 $x=1$，$\lambda>\frac{1}{e}$时，无不动点.

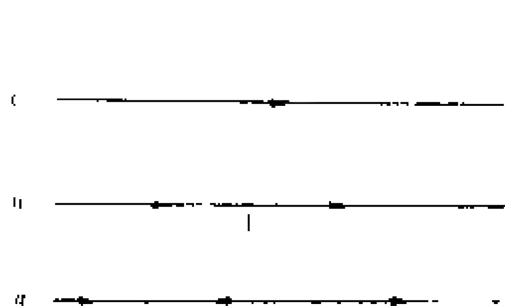


图 23.2

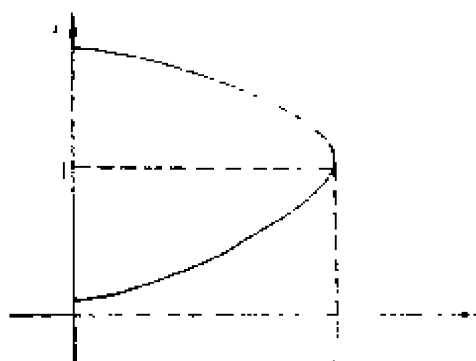


图 23.3

例 23.2 (倍周期分支)再研究一下 $E_\lambda(x)=\lambda e^x$ 当 $\lambda<0$ 时的情形. 如图 23.4:(a)表示当 $-e<\lambda<0$ 时,$E_\lambda(x)$ 有一个双曲吸引不动点;(b)表示当 $\lambda=-e$ 时,不动点 $x=-1$ 处导数为 -1,失去了双曲性,但仍是吸引的.(c)表示 $\lambda<-e$ 时,吸引不动点变成了排斥不动点,同时在不动点两侧出现 3 对吸引的 2—周期点.它们组成一个吸引周期轨.

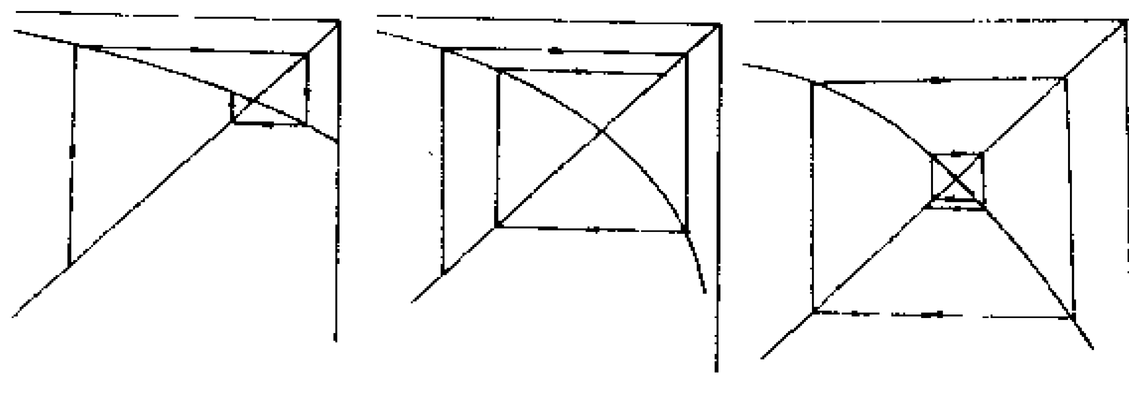


图 23.4

仅仅观察 E_λ 的图形,不易看出这一对 2—周期点产生的原因和它们的吸引性.如果画出 E_λ^2 的图来看,便可一目了然.E_λ^2 是递增的.E_λ 的不动点和 2—周期点都是 E_λ^2 的不动点.图 23.5 表明:由于 E_λ^2 的吸引不动点两侧曲线的凸凹性不同,当这个不动点由吸引变为排斥时,导致了一对不动点的出现.这一对不动点,对 E_λ 而

言，恰是 2—周期轨.

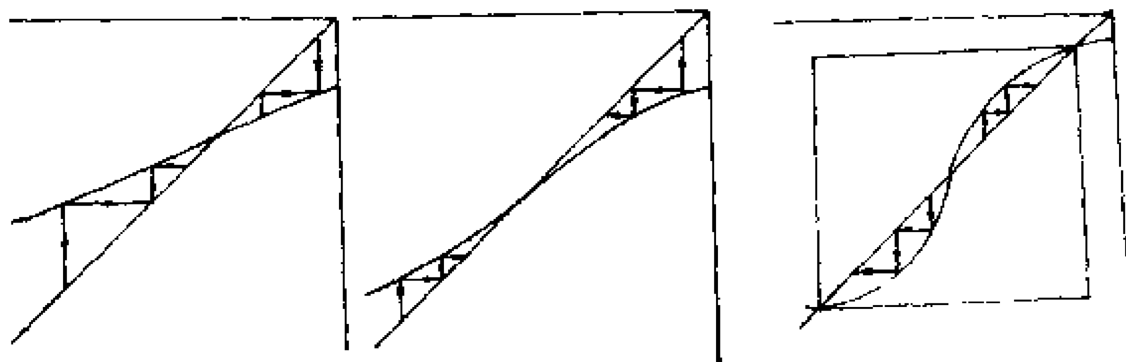


图　23.5(E_λ^2 的曲线图)

这种分支的特点是：双曲吸引不动点失去双曲性，然后由吸引变为排斥，同时在两侧出现一对 2—周期点，它们构成吸引的 2—周期轨. 因为不动点是 1—周期点，所以 2—周期点的出现叫做周期倍增. 这种分支叫做倍周期分支. 它是一种十分重要的分支现象. 一般说来，一个 n—周期点由吸引变为排斥时，它的附近会出

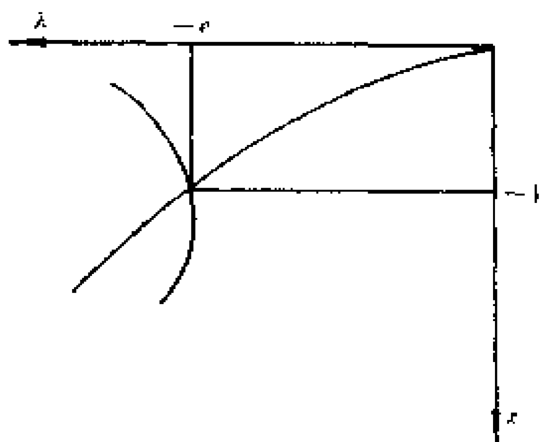


图　23.6

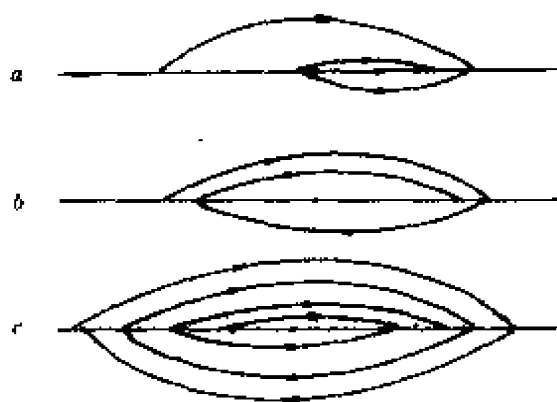


图　23.7

现一对 $2n$—周期点. 也叫做倍周期分支. 一个动力系统随参数改变而由简单状态过渡到复杂的混沌时，这个过渡过程常常表现为一系列的倍周期分支. 图 23.6 画出了 $E_\lambda(x)$ 当 $\lambda<0$ 时的分支图.

图 23.7 是 $E_\lambda(x)$ 当 $\lambda<0$ 时，迭代轨道的相图，其中 a、b、c 对应于图 23.4 的相应蛛网图.

例 23.3　令 $S_\lambda(x)=\lambda\sin x$，它与 $E_\lambda^2(x)(\lambda<0)$ 类似. 当 $\lambda<1$ 时，$S_\lambda(x)$ 在 $x=0$ 处有一个双曲吸引不动点. $\lambda=1$ 时，不动点的双曲性消失，但仍保持吸引. 当 $\lambda>1$ 时，不动点 $x=0$ 由吸引变为排斥，同时在它两侧各出现一个吸引不动点. 我们只画出它的相图（图 23.8）. 图中 a、b、c 分别对应于 $\lambda<1$，$\lambda=1$ 和 $\lambda>1$ 的情形.

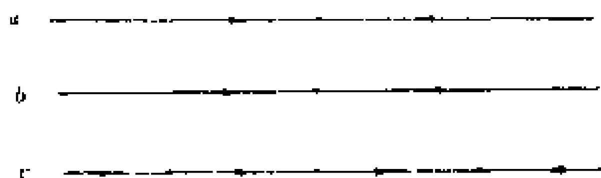


图　23.8

例 23.4　考虑 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 当 μ 由小于 1 变为大于 1 时性质的变化. 这是我们在 §19 中定理 19.4 与定理 19.6 中已分析过了的. 当 $\mu\in(0,1)$ 时，g_μ 有两个不动点，$x_1=\frac{\mu-1}{\mu}$ 和 $x_2=0$，其中 x_1 排斥而 x_2 吸引，都是双曲不动点. 当 $\mu=1$ 时，两个不动点合而为一，失去双曲性，成为一个左排斥而右吸引的不动点 $x=0$. 而当 $\mu>1$ 时，这个不动点又分裂为两个：$x_1=0$，$x_2=\frac{\mu-1}{\mu}$. 双曲性恢复了，但 $x_1=0$ 成为排斥的，而 $x_2=\frac{\mu-1}{\mu}$ 成为吸引的. 图 23.9 是它的相图，其中 a、b、c 分别对应于 $\mu<1$、$\mu=1$、$\mu>1$ 三种情形.

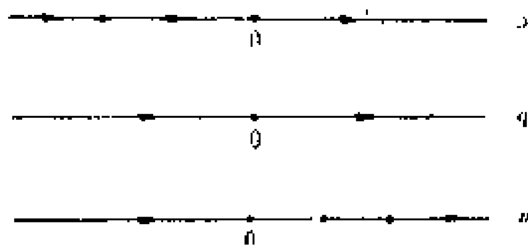


图 23.9

以上几个例子中，后两个例子不属于典型的分支现象．其中例23.3要求对产于分支点的函数在不动点处2阶导数为零．而例23.4型分支则要求函数在不动点处的值对参数μ的导数当μ为分支值时为零．

我们从上述例子中，找出一些一般的分支规律：

定理 23.5　设$f_\lambda(x)=G(x,\lambda)$，$G$关于$x$、$\lambda$有连续偏导数，并有$G(x_0,\lambda_0)=x_0$，$f'_{\lambda_0}(x_0)\neq 1$（即$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,\lambda_0)\neq 1$）．则存在含$x_0$的区间$I$和含$\lambda_0$的区间$J$，和具有连续导数的映射$p:J\to I$，使$P(\lambda_0)=x_0$，$f_\lambda(p(\lambda))=p(\lambda)$，且$f_\lambda$在$I$上没有其他不动点．

证明　考虑由方程$G(x,\lambda)-x=0$所定义的隐函数$x=p(\lambda)$．由于$G(x_0,\lambda_0)-x_0=0$且

$$\frac{\partial}{\partial x}(G(x,\lambda)-x)_{|(x_0,\lambda_0)}=f'_{\lambda_0}(x_0)-1\neq 0 \qquad (23.2)$$

由隐函数定理即知所要结论成立．证毕．

这个定理表明，不动点的消失或分裂，只能发生在不动点处导数为1的偏形．对应的“分支”图，表示出在λ_0邻域不会在x_0处发生分支（图23.10）．事实上，当孤立不动点处导数绝对值不为1时，函数在不动点邻域是结构稳定的，当然不会发生分支．上述例23.1、例23.3、例23.4产生分支时，不动点处导数均为1，从反面说明了这条定理的意义．

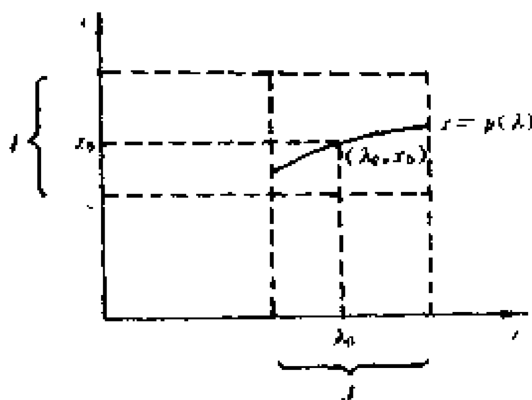


图　23.10

定理 23.6　（切分支定理）设$f_\lambda(x)=G(x,\lambda)$关于$x$、$\lambda$有2阶连续偏导数，并满足：

1°　$f_{\lambda_0}(0)=0$；

2°　$f'_{\lambda_0}(0)=1$；

3°　$f''_{\lambda_0}(0)\neq 0$；

4°　$\left.\dfrac{\partial G}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}\neq 0$.

则存在含 $x=0$ 的区间 I 和具有 2 阶连续导数的映射 $p: I\to R$，使 $f_{p(x)}(x)=x$，且 $p'(0)=0$，$p''(0)\neq 0$.

证明　考虑隐函数方程 $G(x,\lambda)-x=0$. 由于 $(0,\lambda_0)$ 满足这个方程，并且

$$\left.\frac{\partial}{\partial \lambda}(G(x,\lambda)-x)\right|_{(0,\lambda_0)}=\left.\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right|_{(0,\lambda_0)}\neq 0 \qquad (23.3)$$

于是存在 $x=0$ 的邻域 I，使得在 I 上有函数 $\lambda=p(x)$ 满足 $G(x,p(x))-x=0$，即 $f_{p(x)}(x)=x$. 隐函数存在定理也保证了 $p(x)$ 的 2 阶导数连续. 对 $G(x,p(x))-x=0$ 求导数，得

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{(x,p(x))}-1+\left.\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right|_{(x,p(x))}\cdot p'(x)=0 \qquad (23\cdot 4)$$

再求导，得

$$\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right|_{(x,p(x))}+2\left.\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial \lambda}\right|_{(x,p(x))}\cdot p'(x)$$

$$+\left.\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}\right|_{(x,p(x))}\cdot (p'(x))^2+\left.\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right|_{(x,p(x))}\cdot p''(x)=0 \quad (23.5)$$

由(23.4)，取 $x=0$，得 $p'(0)=0$. 代入(23.5)，可求得

$$p''(0)=-\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{\left.\dfrac{\partial G}{\partial \lambda}\right|_{(0,\lambda_0)}}\neq 0 \qquad (23.6)$$

证毕.

由于 $p'(0)=0$ 和 $p''(0)\neq 0$，表明 $p(x)$ 在 $x=0$ 时(即 $\lambda=\lambda_0$ 时)，有极大或极小. 其意义是，当 $p''(0)>0$ 时，若 $\lambda<\lambda_0$ 则 f_λ 无不动点，$\lambda>\lambda_0$ 时，有两个不动点；当 $p''(0)<0$ 时，则相反. 分支图

23.3对应于 $p''(0)<0$ 的情形(就该例而言,不动点为 $x=1$,实际上是 $p''(1)<0$). 分支图 23.11 画出了定理 23.6 中对应于 $p''(0)>0$的情形.

定理 23.7 (倍周期分支定理)设 $f_\lambda(x)=G(x,\lambda)$关于 x 和 λ 有 3 阶连续偏导数,而且满足

1° $f_\lambda(0)=G(0,\lambda)=0$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的某邻域成立;

2° $f'_{\lambda_0}(0)=-1$;

3° $f''_{\lambda_0}(0)\neq 0$;

4° $\frac{\partial}{\partial\lambda}(f^2_\lambda)'\Big|_{(0,\lambda_0)}\neq 0$.

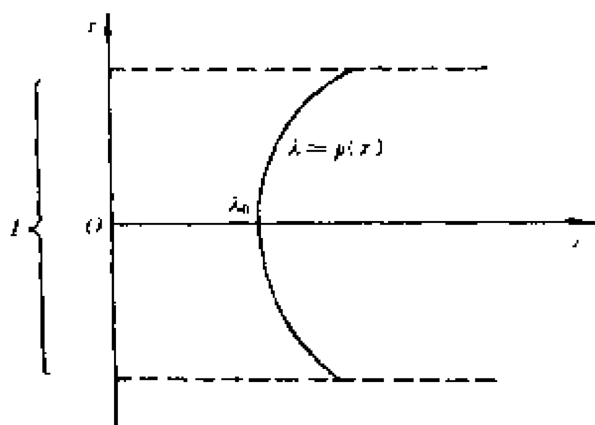


图 23.11

则存在包含 $x=0$ 的区间 I 和 3 阶连续可微函数 $p: I\to R$,使

$$f_{p(x)}(x)\neq x \tag{23.7}$$

但

$$f^2_{p(x)}(x)=x \tag{23.8}$$

证明 令

$$H(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(f^2_\lambda(x)-x) & (x\neq 0)\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}(f^2_\lambda(x)-x)\Big|_{(0,\lambda)} & (x=0)\end{cases} \tag{23.9}$$

易知 H 有 2 阶连续导数(对 $x\neq 0$,有 3 阶连续导数),且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}\Big|_{(0,\lambda_0)}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(f^2_\lambda-x)\Big|_{(0,\lambda_0)}=\dfrac{\partial^2 f^2_\lambda}{\partial x^2}\Big|_{(0,\lambda_0)}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\Big|_{(0,\lambda_0)}=\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}(f^2_\lambda-x)\Big|_{(0,\lambda_0)}=\dfrac{\partial^3 f^2_\lambda}{\partial x^3}\Big|_{(0,\lambda_0)}\end{cases} \tag{23.10}$$

对方程 $H(x,\lambda)=0$ 用隐函数存在定理. 一方面,

$$H(0,\lambda_0)=\frac{\partial}{\partial x}(f_\lambda^2-x)\Big|_{(0,\lambda_0)}=(f_{\lambda_0}^2)'\Big|_0-1$$

$$=f_{\lambda_0}'(0)\cdot f_{\lambda_0}'(0)-1=0 \tag{23.11}$$

另一方面,

$$\frac{\partial H}{\partial\lambda}\Big|_{(0,\lambda_0)}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_\lambda^2)'(0)-1\Big|_{\lambda=\lambda_0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_\lambda^2)'\Big|_{(0,\lambda_0)}\neq 0$$

$$\tag{23.12}$$

于是有 3 阶连续可微的 $p(x)$ 定义于 $x=0$ 邻域,满足 $p(0)=\lambda_0$ 和 $H(x,p(x))=0$. 当 $x\neq 0$ 时,由(23.9),得

$$f_\lambda^2(x)-x=0\qquad(\lambda=p(x)) \tag{23.13}$$

由于 $f_{\lambda_0}'(0)=-1$,由定理 23.5,在 $x=0,\lambda=\lambda_0$ 邻域 $f_\lambda(x)$ 只能有唯一不动点 $x=0$. 故由(23.13)可知,使 $p(x)=\lambda$ 的 x 乃是 f_λ 的 2 周期点. 证毕.

进一步计算可知

$$p'(0)=-\left.\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}}{\dfrac{\partial H}{\partial\lambda}}\right|_{(0,\lambda_0)}=0 \tag{23.14}$$

这是因为,由(23.10),及条件 $f'_\lambda(0)=-1$,有

$$\frac{\partial H}{\partial x}\Big|_{(0,\lambda_0)}=(f_{\lambda_0}^2)''\Big|_{x=0}=f_{\lambda_0}''(0)\cdot(f_{\lambda_0}'(0))^2$$

$$+f_{\lambda_0}''(0)\cdot f_{\lambda_0}'(0)=0 \tag{23.15}$$

另外,还有

$$p''(0)=-\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right)^{-1}\Big|_{(0,\lambda_0)}$$

$$=-f_{\lambda_0}'''(0)\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_\lambda^2)'\Big|_{(0,\lambda_0)}\right]^{-1}\neq 0 \tag{23.16}$$

由(23.14)及(23.16)可以知道分支图的大致模样. 当 $p''(0)>0$ 时，曲线 $\lambda=p(x)$ 开口向右，$p''(0)<0$ 时. 其开口向左. 图 23.6 是开口向左的情形. 定理 23.7 中设不动点 $x=0$ 的位置不随 λ 的变化而变化，这并不失去一般性.

在例 23.2 中，分支现象表现为：不动点由吸引变为排斥，同时产生一个吸引 2—周期轨. 会不会有相反情形：不动点由排斥变为吸引，同时产生一个排斥 2—周期轨呢？这种逆向的周期倍增现象一般说来并非不可能. 但如果 f_λ 对每个固定的 λ，关于 x 有负的西瓦兹导数，即 $Sf_\lambda<0$，则逆向周期倍增是不可能的. 图 23.12 画出逆向周期倍增时，$f_\lambda^2(x)$ 的函数曲线：x_0 是由排斥变为吸引的不动点，其两侧的不动点 x_1、x_2 是排斥的，它们是 f_λ 的排斥 2—周期轨. 于是有 $c_1\in(x_1,x_2)$，$c_2\in(x_0,x_2)$ 使 $(f_\lambda^2)'\big|_{c_1}=(f_\lambda^2)'\big|_{c_2}=1$. 这表明 $(f_\lambda^2)'$ 将在 (c_1,c_2) 内有正的极小. 这与 $Sf_\lambda^2<0$ 矛盾.(命题 22.4)

以上所提到的分支现象都是在局部发生的. 具体地说，都是在不动点邻域发生的. 当然，f^m 的不动点可能是 f 的 m 周期点，因而上述分支现象会联系着周期点邻域的分支. 但仍是局部现象.

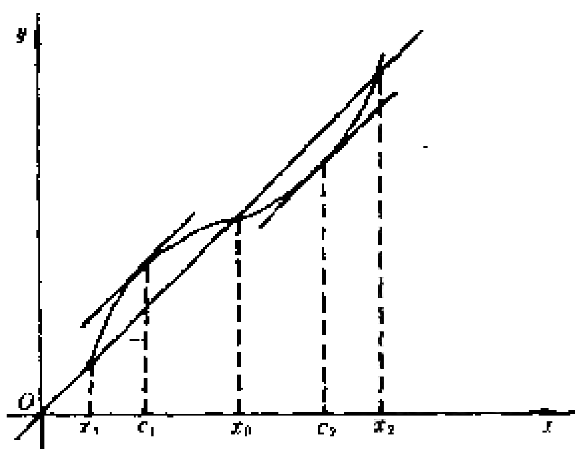


图　23.12

影响全局的分支现象，我们其实已讨论过了. 二次函数族 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$，当参数 μ 从小于 4 变为大于 4 时，其轨道性态发生了全局性变化. 明显可以看到的是：当 $\mu\leqslant 4$ 时，g_μ 作用下从[0,1]出发的轨道仍在[0,1]之中. 一旦有 $\mu>4$，在[0,1]中便有一个稠密开集，从这开集中任一点出发的轨道都将逃向 $-\infty$. 留在[0,1]中的轨道，构成一个康托完全集，

这确实是全局性的变化.

为了找寻全局性变化的特征和根源,下面引入异状点或同宿点的概念.

设 p 是函数 f 的一个排斥点. 为简单起见,设 $f'(p)>1$,对于 $f'(p)<-1$ 的情形可考虑 $f^2(p)$,故这不失一般性. 这时,必有 p 的邻域 (α,β)(当 p 是定义区间端点时,也可以是 $[p,\beta)$ 或 $(\alpha,p]$),使对一切 $x\in(\alpha,\beta)$, $x\neq p$,有

$$|f(x)-p|>|x-p| \tag{23.17}$$

满足这一条件的 (α,β) 中之最大者,叫做 p 的不稳定邻域,记之以 $W^u_{loc}(p)$. (例如,对 $g_\mu=\mu x(1-x)$,当 $\mu>4$ 时,$x=0$ 是排斥不动点. 易验证 $W^u_{loc}(0)=(-\infty,\frac{1}{2})$.)在此基础上,有

定义 23.8 设 $f(p)=p$ 且 $f'(p)>1$. 如果点 $q\in W^u_{loc}(p)$ 而且有正整数 n 使 $f^n(q)=p$,则称 q 是 p 的同宿点,或关于 p 的异状点. (homoclinic point)

同宿点的意思是指 $f^n(q)=f(p)=p$,且 $f^{-n}(q)\to p$. 亦即过 q 的轨道两端都以 p 为归宿. 异状点则指:这种点的存在,将使函数迭代轨道的性质变得复杂异常.

显然,若 q 为 p 的同宿点,则对一切正整数 n, $f^{-n}(q)$ 都是 p 的同宿点. 这些点组成的轨道,称为 p 的一条同宿轨. 例如,对函数 $g(x)=4x(1-x)$,由于 $g(\frac{1}{2})=1$, $g(1)=0$,所以 $x=0$ 有一条过 $\frac{1}{2}$ 的同宿轨. 当 $\mu>4$ 时,由于 $g_\mu(x)=1$ 有两个根 $\hat{z}$ 和 z,所以过 $x=0$ 有两条同宿轨,分别过 $\hat{z}$ 和 z.

定义 23.9 一条同宿轨叫做非退化的,如果对轨道上每一点 x 有 $f'(x)\neq 0$. 否则,称之为退化的.

例如,$\mu=4$ 时,$g_\mu=4x(1-x)$ 的关于 $x=0$ 的同宿轨是退化的,

因为 $g'_\mu\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 而当 $\mu>4$ 时，g_μ 的关于 $x=0$ 的两条同宿轨都是非退化的.

退化同宿轨与非退化同宿轨性质上有很大差别. 下面将看到：非退化同宿轨将引出混沌，而退化同宿轨常常导至复杂的分支.

定理 23.10　设 p 是 f 的排斥不动点，$f'(p)>1$. q 是 p 的一条非退化同宿轨上的一点. 则对 p 的每个邻域 U，存在正整数 n 和 U 的子集 Λ，使得 f^n 在 Λ 上与 Σ_2 上的移位映射 σ 拓扑共轭.

证明　取 p 的足够小邻域 $W\subset U$，使对一切 $x\in W$ 有 $f'(x)>\delta>1$. 不妨设 $q\in W$. 这时，有 $n>0$ 使 $f^n(q)=p$. 由于 q 在非退化同宿轨上，故在 q 的足够小邻域有 $(f^n(x))'\neq 0$. 于是有 q 的邻域 V 使 f^n 同胚地把 V 映成 $f^n(V)$，而使 p 是 $f^n(V)$ 的内点.

设在 V 上有 $|(f^n(x))'|>\varepsilon>0$，取 j 使 $\delta^j\varepsilon>1$. 不妨设 V 足够小，以致 $f^{n+i}(V)\subset W$，$i=1,2,\cdots,j$，但 $f^{n+i}(V)\cap V=\varnothing$. 于是有 $k>j$，使 $f^{n+k}(V)$ 覆盖 V，且对 $x\in V$ 有 $|(f^{n+k}(x))'|>1$. 于是，在 f^{n+k} 作用之下，V 的像同胚地覆盖了 $V_1=f^n(V)$ 和 V 自己.

显然，f^{n+k} 作用之下，V_1 的像也覆盖了 V 和 V_1 自己. 但 f^{n+k} 可能不是 V_1 上的同胚. 适当缩小 V_1 成为 V^*，使 $f^{n+k}(V^*)$ 覆盖 V 及 V^*，且对 $x\in V^*$ 有 $|(f^{n+k}(x))'|>1$.

于是，令 $g=f^{n+k}$，置

$$\Lambda=\{x\in V\cup V^*\,|\,\text{对任意 } n,f^n(x)\in V\cup V^*\}\qquad(23.18)$$

则可以给 Λ 中每个点 x 一个由 0 与 1 组成的无穷列如下：

$$\begin{cases}s(x)=s_0s_1\cdots s_m\cdots\\ \text{当 } g^m(x)\in V,\text{取 } s_m=0,g^m(x)\in V^*\text{ 时，取 } s_m=1\end{cases}\qquad(23.19)$$

仿 §10 例 10.2，容易证明 $s:\Lambda\to\Sigma_2$ 是 g 到 σ 的一个拓扑共轭. 证毕.

由此可见，若 f 有非退化同宿轨，则它有任意周期的周期点.

更进一步地，f 在定义域的某子集上出现混沌.

上述定理表明，非退化同宿轨的存在给 f 的轨道性态以很大影响. 下面直观地指出：退化同宿轨处可以引起复杂的分支现象.

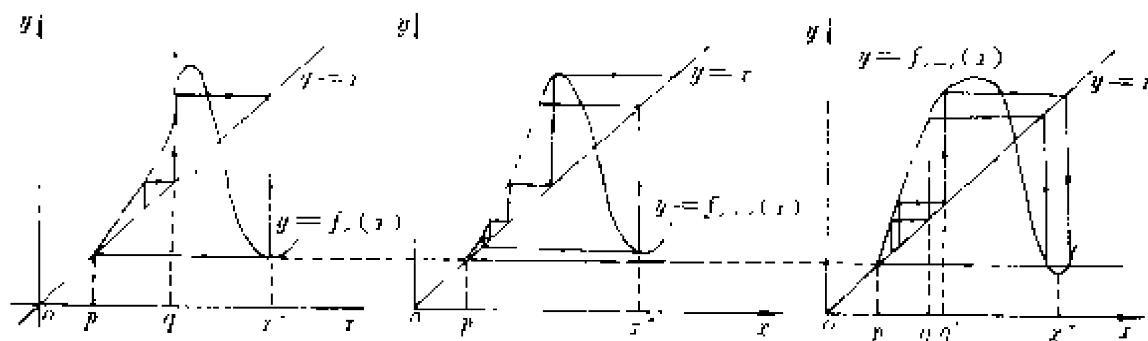


图　23.13

如图 23.13，(a)中表示 $f_\lambda(x)$ 的排斥不动点 p 有一个同宿点 q，过 q 的同宿轨最后经过极小值点 x^* 而返回 p. 由于 $f'_\lambda(x^*)=0$，这是一个退化的同宿轨. 在图 23.13 之(b)中，$f_\lambda(x)$ 略加改变成为 $f_{\lambda+\varepsilon}(x)$. 由于 x^* 处函数值增大，使得过 x^* 的那条退化同宿轨消失了. 本来，p 点邻域的点在迭代之下可以有很多一再返回，现在不行了. 在图 23.13 之(c)中，$f_\lambda(x)$ 由于 λ 作相反的变化，使 x^* 处的函数值变校小，导至两条非退化同宿轨的诞生，从而使轨道的性状有了全局性的变化. 因此，λ 是函数族 $f_t(x)$ 的一个分支值. 这种分支现象表现为某个不动点的同宿轨由无到有，又由一变二，由退化变为非退化，称为同宿分支. 同宿分支常常引起轨道性态全局性的变化.

回到函数族 $g_\mu=\mu x(1-x)$. $\mu=4$ 就对应于同宿分支. 当 $\mu<4$ 时，不动点 $x=0$ 无同宿轨. 随 μ 的增长. $\mu=4$ 时出现了一条退化同宿轨，$\mu>4$ 时，这条退化同宿轨分裂为两条非退化同宿轨. 若进一步分析将发现，$\mu>4$ 时，g_μ 是 C^2 结构稳定的，对 $\mu<4$，在 $\mu=4$

的左半邻域有无穷多个切分支值和无穷多个倍周期分支值，呈现出极复杂的景象.

§24　用符号方法研究单峰函数

前面已经看到，符号动力系统的方法给了我们很大帮助，使我们能够清楚地掌握 $\mu\geqslant4$ 时，$g_\mu=\mu x(1-x)$ 的迭代轨道的复杂面又有很强规律性的现象；并看到 $\mu>4$ 的情形与 $\mu=4$，$\mu<4$ 的情形之间的很大不同. 当 $\mu>4$ 时，极大值点 $x=\frac{1}{2}$ 在 g_μ 作用下趋于 $-\infty$. $\mu=4$ 时，它变为排斥不动点. $\mu<4$ 时，它的行踪我们尚不了解. 那么，g_μ 的轨道性态的变化与极大值点的行踪在多大程度上相互依赖呢？用符号动力系的方法可以揭开这里的奥秘.

我们本节中一直设 f 是[0,1]上的单峰函数，即满足两个条件：

1. $f(0)=f(1)=0$；

2. f 有唯一的极值点 c，$0<c<1$，$0<f(c)\leqslant1$. 显然，f 在[0,c]上增，在[c,1]上减. 为了使用符号方法，引入下面定义.

定义 24.1　设 $x\in[0,1]$，约定

$$s_j=\begin{cases}0 & (\text{当 } f^j(x)<c)\\ 1 & (\text{当 } f^j(x)>c)\\ C & (\text{当 } f^j(x)=c)\end{cases}\tag{24.1}$$

并称序列 $(s_0s_1s_2\cdots)$ 为 x 在 f 作用下的踪迹，记以 $S(x)$：

① 踪迹原文为 itinerary，踪型原文为 Kneading sequence，中文未见适当译名，此处从直观意义加以命名.

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \cdots) \tag{24.2}$$

这里 C 是一个特定的专用符号（意为 *Centre*，中心）. 点 $f(c)$ 的踪迹 $S(f(c))$ 叫做 f 的踪型. 记之以 $K(f)$.

例如，取 $f(x)=g_4(x)=4x(1-x)$，这时 $c=\frac{1}{2}$，$f(c)=1$，$f^j(c)=0(j>1)$，于是 $K(f)=(10\dot{0}\cdots)$，若取 $f(x)=g_2(x)=2x(1-x)$，则对一切 j 有 $f^j(c)=c=\frac{1}{2}$，故有 $k(f)=(\dot{C}CC\cdots)$.

若在序列的某一项出现了记号 C，则 C 后面必为 $K(f)$. 具体地说，若 $s_j=C$ 而 $K(f)=a_1a_2a_3\cdots$，则 $s_{j+k}=a_k$.（因此，C 后而就不必再写出来了）这是记号 C 与 0，1 不同之点. 我们把完全由 0 与 1 构成的序列叫做正规序列. 对于一个给定的单峰函数，哪些序列可能是某些点的踪迹？特别是，哪些正规序列可能作为点的踪迹？这是一个有趣而且重要的问题.

容易看到，如果函数的迭代轨道性态简单，踪迹的样式也往往贫乏得很. 例如，对 $f=g_\mu$，当 $1<\mu<2$ 时，可能出现的踪迹不过是 $(00\dot{0}\cdots)$、$(100\dot{0}\cdots)$ 或 $(C00\dot{0}\cdots)$. 而当 $2<\mu<3$ 时，踪迹形式略为丰富一些，但也不过只有

$(C\dot{1}\dot{1}\cdots)$、$(00\dot{0}\cdots)$、$(1\dot{1}\dot{1}\cdots)$、$(00\cdots 011\dot{1}\cdots)$ 及 $(00\cdots 0C11\dot{1}\cdots)$ 几种而已.

为了探索 $\mu>3$ 时，可能有哪些踪迹形式，我们先在踪迹之间，即符号序列之间建立起顺序关系. 设 $\underline{s}=(s_0s_1s_2\cdots)$，$\underline{t}=(t_0t_1t_2\cdots)$，且记 $s_0,s_1,s_2,\cdots,s_n$ 中 1 的个数为 $\tau_n(s)$. 约定符号 0，1，C 之间有大小关系 $0<C<1$，则可引入 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 之间的序关系"$\prec$"如下：

定义 24.2 设序列 $\underline{s}$ 与 $\underline{t}$ 的前 n 个符号对应相同，如果 $\tau_{n-1}(s)$ 为偶数且 $s_n<t_n$，或 $\tau_{n-1}(s)$ 为奇数且 $s_n>t_n$，则称 s 先于 t，记作 $\underline{s}\prec\underline{t}$.

显然，点在直线上的序与它们的踪迹间的序不相矛盾，才对我们方

便些. 事实上,正是如此:

定理 24.3　对于给定的单峰函数 f 和 $x,y\in[0,1]$,有

1°　若 $S(x)\prec S(y)$,则 $x<y$,

2°　若 $x<y$,则 $S(x)\preceq S(y)$.

证明　只证明 1°就可以了. 设 $S(x)=(s_0s_1s_2\cdots)$,$S(y)=(t_0t_1t_2\cdots)$,并设 $S(x)$ 与 $S(y)$ 前 n 个符号对应相同,但第 $n+1$ 个不同,$n=0,1,2,\cdots$. 我们对 n 进行数学归纳,当 $n=0$ 时,命题显然. 设命题对 $n-1$ 真,再证它对 n 亦真. 易知

$$S(f(x))=(s_1s_2s_3\cdots),S(f(y))=(t_1t_2t_3\cdots)\qquad(24.3)$$

当 $s_0=0$ 时,由于 $\tau_n(S(x))=\tau_{n-1}(S(f(x)))$,故由 $S(x)\prec S(y)$ 及定义 24.2,即得 $S(f(x))\prec S(f(y))$. 由归纳假设 $f(x)<f(y)$,又由 $s_0=t_0=0$ 知,$x,y\in[0,c)$,故 $x<y$. 当 $s_0=1$ 时,由于 $\tau_n(S(x))=\tau_{n-1}(S(f(x)))+1$,由定义可知,$S(x)\prec S(y)$ 蕴含 $S(f(y))\prec S(f(x))$,于是由归纳假设,得 $f(y)<f(x)$. 但这时 $x,y\in(c,1]$,故 $x<y$. 证毕.

若对于 f,序列 $\underline{s}$ 是[0,1]上某点的踪迹,则称 $\underline{s}$ 关于 f 是允许的. 或说 $\underline{s}$ 是 f 的允许列. 以 Σ_f 记所有的关于 f 的允许列之集. 由定理 24.3 可知,对所有的 x,由于总有 $f^n(x)\leqslant f(c)$,故 $S(f^n(x))\preceq S(f(c))$,即 $\sigma^n(S(x))\preceq K(f)$. 亦即,若 $\underline{s}\in\Sigma_f$,则 $\sigma^n(\underline{s})\preceq K(f)$. 这是 $\underline{s}$ 成为 f 的允许列的必要条件.

但这并不是 $\underline{s}\in\Sigma_f$ 的充分条件. 例如取 $f(x)=g_4(x)=4x(1-x)$,则 $K(f)=(100\dot{0}\cdots)$,任一个序列 $\underline{t}$ 均有 $\sigma^n(\underline{t})\preceq K(f)$. 但并非每个序列都是允许的. 如取 $\underline{s}=(0\cdots 0100\dot{0}\cdots)$,易知 $\underline{s}\notin\Sigma_f$,因为以一串零结尾的序列显然不能不含记号 C.

下面给出一个充分条件:

定理 24.4 设 f 是[0,1]上的单峰函数,且 c 不是周期点,若序列 t 满足 $\sigma^n(t)\prec K(f)(n=1,2\cdots)$,则 $t\in\Sigma_f$,亦即有 $x\in[0,1]$,使 $S(x)=t$.

证明 若 $t=(000\cdots)$ 或 $(1000\cdots)$,显然.因这时有 $S(0)=(000\cdots)$,$S(1)=(1000\cdots)$,故设 t 不是 $(000\cdots)$ 或 $(1000\cdots)$.

令

$$\begin{cases}L_t=\{x\in[0,1]\mid S(x)<t\}\\R_t=\{x\in[0,1]\mid S(x)>t\}\end{cases}\tag{24.4}$$

下面证明 L_t 和 R_t 都在[0,1]中开.由于 $L_t\cap R_t=\varnothing$,而且 $0\in L_t$,$1\in R_t$,故都非空.若 L_t,R_t 在[0,1]中开,则可知有一个[0,1]中的非空闭集,其中每点的踪迹都是 t.

首先注意到,对任意给定的 $s=(s_0s_1s_2\cdots)$,若对 $i=0,1,\cdots,n$ 均有 $s_i\neq C$,则集合 $\{x\in[0,1]\mid S(x)=(s_0s_1\cdots s_nt_{n+1}t_{n+2}\cdots)\}$ 是开集,这里 $t_{n+1}t_{n+2}\cdots$ 是任意序列.事实上,若 $S(y)=s$,则有 y 的开邻域 W_i,使 $f^i(W_i)$ 整个地和 $f^i(y)$ 在 c 的同侧.对 $i=0,1,\cdots,n$ 求这些邻域的交,得到这样开集.

设 $z\in L_t$,并记 $S(z)=s=(s_0s_1\cdots)$,按(24.4)有 $s<t$.由于 $s\neq t$,故有 $n\geqslant 0$,使 $s_n\neq t_n$,但当 $k<n$ 时,有 $s_k=t_k$.下面分两种情形:$t_n=C$,或 $t_n\neq C$.若 $t_n=C$,则 $\sigma^{n+1}(t)=K(f)$,与假设条件矛盾.故只考虑 $t_n\neq C$ 情形.设 $t_n=1$,则只有 $s_n=0$ 或 C 两种可能.$s_n=0$ 时,按我们刚才提示过的,所有那些前 $n+1$ 项与 s 相同的序列对应的点,组成 z 的邻域,此邻域当然在 L_t 之中.

若 $s_n=C$,则 $K(f)=(s_{n+1},s_{n+2},s_{n+3},\cdots)$.由假设不会有等式 $\sigma^{n+1}(t)=(s_{n+1}s_{n+2}s_{n+3}\cdots)=K(f)$,故有 $d>0$,使 $s_{n+d}\neq t_{n+d}$.因为 C 不是周期点,故 $s_{n+i}\neq C$,$i=1,2\cdots$.考虑满足条件

$$S(x) = (s_0s_1\cdots s_{n-1} * s_{n+1}\cdots s_{n+k}\cdots) \tag{24.5}$$

的 x 的集合 W，这里 $*$ 可以是 0，1，或 C，则 W 是含 z 的连通开集，但 $t\notin W$. 于是由 $z\in L_t$ 可知，对任意 $x\in W$ 有 $S(x)\prec \underline{t}$，即 $x\in L_t$.

设 $t_n=0$，证法类似于 $t_n=1$ 情形. 至此，证明了 L_t 在[0，1]中开. 同理可证 R_t 在[0，1]中开. 证毕.

顺便指出，定理中的条件 $\sigma^i(s)\prec K(f)$ 不能减弱，而 c 不是周期点这一要求可以去掉，但条件 $\sigma^i(t)\prec K(f)$ 要略加修改. 事实上，如果 $K(f)=(a_1\cdots a_nCa_1\ a_1\cdots a_nC\cdots)$，当 $a_1,\cdots,a_n$ 中有偶数个 1 时，有

$$(a_1a_2\cdots a_n0\dot{a}_1\dot{a}_2\cdots a_n'\ 0\cdots)\prec K(f) \tag{24.6}$$

但集合

$$\{x \mid S(x) = (a_1\cdots a_n0\dot{a}_1\cdots \dot{a}_n\dot{0}\ \cdots)\} \tag{24.7}$$

并不一定是闭的，这与上述定理证明中的结论矛盾. 然而，我们只要把条件 $\sigma^i(t)\prec K(f)$ 改为

$$\begin{cases}\sigma^i(t) \prec (a_1\cdots a_n0a_1\cdots a_n0\ \cdots) & (\text{当 } a_i \text{ 中有偶数个 } 1)\\ \sigma^i(t) \prec (a_1\cdots a_n1a_1\cdots a_n1\ \cdots) & (\text{当 } a_i \text{ 中有奇数个 } 1)\end{cases} \tag{24.8}$$

定理的结论便可用于 c 为周期点的情形了. 证明从略.

下面，我们应用踪型 $K(f)$ 来研究单峰函数. 首先，要了解的是踪迹为循环序列的点与周期点的关系.

定理 24.5 设 $\underline{s}=(s_0\cdots s_{n-1}\dot{s}_0\cdots \dot{s}_{n-1}\cdots)$ 是 f 的允许序列，它对一切 i 满足 $\sigma^i(\underline{s})\prec K(f)$. 则存在 f 的 n-周期点 p 使 $S(p)=\underline{s}$.

证明　若 $K(f)$ 不是循环列，可直接应用定理 24.4 证明过程中所指出的事实：集合

$$J = \{z \in I \mid S(z) = \underline{s}\} \tag{24.9}$$

是非空的闭区间，且 $f^n(J)\subset J$.

若 J 之长度为零，J 仅含一个点，此点即所要的点 p. 若 J 为非退化区间$[a,b]$，则易知 f^n 是$[a,b]$到自身的同胚. 当 f^n 递增时，$f^n(a)=a$、$f^n(b)=b$；当 f^n 递减时，则有 $f^n(a)=b$，$f^n(b)=a$，且有 $x_0\in(a,b)$，使 $f^n(x_0)=x_0$. 于是 a、b 为 f 的 n—周期点或 $2n$—周期点，且 $S(a)=S(b)=\underline{s}$. x_0 为 f 的 n—周期点且 $f(x_0)=\underline{s}$.

当 $K(f)$是循环列时，有些细节讨论从略. 证毕.

附带指出，定理中的条件 $\sigma^i(\underline{s})<K(f)$ 可以减弱为 $\sigma^i(\underline{s})\leq K(f)$.

下面，把上述定理用于负西瓦兹导数的单峰函数：

定理 24.6　设单峰函数 f 满足 $Sf<0$. 又设 s 是具有周期 n 的非恒零循环列，且对所有的 i 满足 $\sigma^i(\underline{s})\leq K(f)$，$i=0,1,2,\cdots$. 则至多有两个周期轨具有踪迹 $\underline{s}$.

证明　设所有具有踪迹 $\underline{s}$ 的点之集为 J. 前已指出，J 是一个区间，且 f^n 把 J 同胚地变为自身. 于是 f 在 J 上的周期点均为 n—周期点或 $2n$—周期点. 用反证法. 设 J 上有三个点 $x_1<x_2<x_3$ 都是 f 的不同轨周期点. 令 $F=f^{2n}$，则它们都是 F 的不动点. 不妨设它们之间没有 F 的其他不动点. 由定理 22.6 之推论 22.7 可知，x_1，x_2，x_3 中只能有一个是吸引(包括半边吸引)的. 它只能是 x_2. 这将推出 $F'(x)$在$[x_1,x_3]$内部有正的局部极小，这与 $SF<0$ 矛盾. 证毕.

定理 24.7　设单峰函数 f 满足 $Sf<0$，又设 $\underline{s}=(s_0\cdots s_{n-1}s_0\cdots s_{n-1}\cdots)$是正规的循环列，满足

1°　$\sigma^i(s)\leq K(f)$　对 $i=0,1,2,\cdots$成立；

2°　$I_{n-1}(s)=s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}$　是奇数.

则有

（Ⅰ）　存在唯一的周期点 z_s，其周期为 n 且 $S(z_s)=s$；

（Ⅱ）　如果对某个 i 有 $\sigma^i(\underline{s})=K(f)$，且 $(f^n(x))'\big|_{z_s}<-1$，则有 f 的一对 $2n$—周期点具有踪迹 $\underline{s}$.

证明　由条件 2°，可知当 $S(x)=\underline{s}$ 时，有 $(f^n(x))'<0$，这推出 f 只能有一个具有踪迹 $\underline{s}$ 的 n—周期点. 当 $(f^n(x))'\big|_{z_s}<-1$ 时，由 $\sigma^i(s)=K(f)$ 表明有吸引 c 的周期点 p，使 $S(p)=\underline{s}$. 但 z_s 不是吸引的，由 1°，p 只能是 2—周期点. 证毕.

以下为简便，用记号 $(s_0s_1\cdots s_{n-1})$ 表示周期为 n 的正规循环列，即 $(s_0s_1\cdots s_{n-1})=(s_0s_1\cdots s_{n-1}s_0s_1\cdots s_{n-1}\cdots)$.

定义 24.8　令 $\underline{s}=(s_0s_1\cdots s_n)$. 如果对一切 $i=0,1,2,\cdots$，有 $\sigma^i(\underline{s})\preceq\sigma^j(\underline{s})$，则称 $\sigma^j(\underline{s})$ 为极大列，记之以 $M(\underline{s})$.

为了研究极大列，引入一些记号. 设 $\underline{s}=(s_0s_1\cdots s_n)$ 而 $\underline{t}=(t_0t_1\cdots t_n)$，令 $\underline{s}\cdot\underline{t}=(s_0s_1\cdots s_nt_0t_1\cdots t_n)$. 再设 $\hat{s}_n=1-s_n$，记 $\hat{\underline{s}}=(s_0s_1\cdots s_{n-1}\hat{s}_n)$. 考虑一些特殊的序列：

$$\begin{cases}\tau_0=(1)\\ \tau_1=(10)\\ \tau_2=(1011)\\ \tau_3=(10111010)\\ \tau_{j+1}=\tau_j\cdot\hat{\tau}_j\end{cases}\tag{24.10}$$

并令

$$\tau_\infty=\lim_{n\to+\infty}\tau_n=1011101010111011101110101011101 0\cdots\tag{24.11}$$

于是，易知

命题 24.9　按(24.10)，有 $\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_j<\tau_{j+1}\cdots$，且 τ_j 的最小周期为 2^j，每一周期中 1 的个数为奇数.

证明　τ_j 具有周期 2^j 是显然的. 由于把 τ_j 分成相等的两段

时，两段仅有最后1个符号不同.故 2^j 是它的最小周期.每一周期中1的个数为奇数也显然.根据"1的个数为奇数"，由序 $\prec$ 之定义，即知 $\tau_j \prec \tau_{j+1}$.证毕.

命题 24.10 $M(\tau_j)=\tau_j$, $(j=0,1,2,\cdots)$.

证明 对 j 作数学归纳. $j=0,1$ 时，显然.设 $M(\tau_{j-1})=\tau_{j-1}$，显然有

$$\hat{\tau}_j = \tau_{j-1} * \tau_{j-1} = M(\tau_{j-1}) = \tau_{j-1} \prec \tau_j \qquad (24.12)$$

设 $0<i<2^{j-1}$，则

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^i(\tau_{j-1}) * \sigma^i(\hat{\tau}_{j-1}) \prec \tau_{j-1} * \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j \qquad (24.13)$$

类似地，对 $2^{j-1}+1 \leqslant i < 2^j$，记 $l=i-2^{j-1}$，则

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^l(\hat{\tau}_{j-1}) * \sigma^l(\tau_{j-1}) \prec \tau_{j-1} * \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j \qquad (24.14)$$

这里用到了 $M(\hat{\tau}_{j-1}) = M(\tau_{j-2}) = \tau_{j-2} \prec \tau_{j-1}$.

如果 $i=2^{j-1}$，则有 $\sigma^i(\tau_j) = \hat{\tau}_{j-1} * \tau_{j-1} \prec \tau_{j-1} * \hat{\tau}_{j-1}$.证毕.

命题 24.11 设 $\underline{t}$ 是任一正规周期列，且 $\underline{t} \neq (0)$ 或任一个 τ_j，则 $M(\underline{t}) \succ \tau_j$.

证明 由于 $\underline{t} \neq (0)$, $\underline{t} \neq \tau_0 = (1)$，故有 $i \geqslant 0$，使

$$\sigma^i(\underline{t}) = (10\cdots) \succ (1) = \tau_0 \qquad (24.15)$$

用反证法.设所要证之结论不真.则有 j，使

$$\tau_{j-1} \prec M(\underline{t}) \prec \tau_j \qquad (24.16)$$

于是，有

$$\tau_{j-1} = \tau_{j-1} * \tau_{j-1} \prec M(\underline{t}) \prec \tau_{j-1} * \hat{\tau}_{j-1} \qquad (24.17)$$

但 $\tau_{j-1} * \tau_{j-1}$ 与 $\tau_{j-1} * \hat{\tau}_{j-1}$ 仅有末一个元素不同.这说明必有 $M(\underline{t}) = \tau_{j-1}$ 或 τ_j.与假设矛盾.证毕.

我们运用上述关于踪迹序列的知识来分析单峰函数族中函数 f_λ 的周期轨随参数变化而变化的情形.在§9中，我们曾引入"满

的单峰函数族"的概念. 按照这个概念，$g_\mu=\mu x(1-x)$ 当 $\mu\in[0,4]$，$x\in[0,1]$时，恰是一个满的单峰族. 一般说来，如果单峰族 f_λ 还满足 $Sf_\lambda<0$，则称之为 S—单峰族. 下面设 f_λ 当 $\lambda\in[\alpha,\beta]$，$x\in[a,b]$时，是$[a,b]$上的满的 S—单峰族. 显然有 $K(f_\alpha)=(0)$，$K(f_\beta)=(100\cdots)$. 由于对任意 j 有 $K(f_\beta)>\tau_j$，故 f_β 在$[a,b]$上对任一 j 有 2^j 周期点.

实际上，对任一周期列 s，总有 $s<(100\cdots)=K(f_\beta)$，这表明 f_β 对任意 n 有 n 周期点.

可以证明，对于满的 S—单峰族 f_λ，$K(f_\lambda)$随 λ 的增长，将由(0)开始，经过 $\tau_0,\tau_1,\cdots,\tau_n\cdots$达到 τ_∞，然后再经过一系列状态，最后到达$(100\cdots)$. 这中间可能有反复，但 τ_j 首次出现的顺序是依照上述顺序的.（对于 $g_\mu=\mu x(1-x)$，可以证明不会有反复.）

当取 $f_\lambda=g_\mu=\mu x(1-x)$时，让 $K(g_\mu)$由小到大地增长来分析，与§9 的定理 9.1 对照一下，是很有启发性的.

当 $\mu<2$ 时，$K(g_\mu)=(0)$，g_μ 仅有不动点. $\mu=2$ 时，$K(g_\mu)=C$，g_μ 的一个吸引不动点处导数由正变为零. 出现超稳定不动点. 随着 μ 的增加，g_μ 的吸引不动点处的导数由零变负，$K(g_\mu)$增长成为(1)，即 $K(g_\mu)=(1)=\tau_0$.

当 μ 继续增长时，g_μ 的吸引不动点处的导数继续减小，(因为是负的，其绝对值在增大)，直到小于−1. 这时，依照定理 23.7，当导数值经过−1 时，将产生倍周期分支，出现一对吸引 2—周期点. 这时，$K(g_\mu)$仍保持为 τ_0，而且这 3 个周期点(一个排斥不动点和一对吸引 2—周期点)的踪迹都是 τ_0；这 3 个点处 g_μ 的导数均为负值.

随着 μ 的继续增长，$K(g_\mu)$终于从(1)增加到(1C). 超稳定 2—

周期点第一次出现了．μ 再增长时，$K(g_\mu)$ 从 $(1C)$ 变为 (10)，即一对 2—周期点处的导数一正、一负．

一般地，若 $\underline{s}=(s_0s_1\cdots s_n)$，记 $s^*=(s_0s_1\cdots s_{n-1}C)$，则在 τ_j 与 τ_{j+1} 之间有一个"分界"序列 τ_{j+1}^*：

$$\tau_j < \tau_{j+1}^* < \tau_{j+1} \tag{24.18}$$

把使 $K(g_\mu)=\tau_j^*$ 的 μ 记作 μ_j．显然，g_{μ_j} 有超稳定的 2^j—周期轨．

刚才我们已分析过 μ 从零开始增长到 $\mu_0(K(g_{\mu_0})=\tau_0^*=(C))$，又从 μ_0 增长到 μ_1 的情形．一般地，当 μ 从 μ_j 增加到 μ_{j+1} 时，g_μ 的特点是：

对应于 $\mu=\mu_j$，$K(g_{\mu_j})=\tau_j^*$，g_{μ_j} 有超稳 2^j—周期轨．记其中最大的超稳 2^j—周期点为 p_{μ_j}，显然 $p_\mu=g_{\mu_j}(\frac{1}{2})$，而且 $S(p_{\mu_j})=\tau_j^*$，$(g_{\mu_j}^{2^j}(x))'\mid_{p_{\mu_j}}=0$．

当 μ 稍大于 μ_j 时，超稳 2^j—周期轨失去超稳性成为稳定 2^j—周期轨．记其中最大的为 p_μ．这时，$K(g_\mu)=\tau_j$，并且 $S(p_\mu)=\tau_j$．函数 g_μ 只有这一个 2^j—周期轨，而且只有一个以 τ_j 为踪迹的周期轨．这时，$(g_\mu^{2^j}(x))'\mid_{p_\mu}\in(-1,0)$．

当 μ 到达某一点 $\bar{\mu}_j$ 时，$(g_{\bar{\mu}_j}^{2^j}(x))'\mid_{p_\mu}=-1$，这时，将发生倍周期分支，$\bar{\mu}_j$ 是分支值．

当 $\mu\in(\bar{\mu}_j,\mu_{j+1}^*)$ 时，在 p_μ 附近将出现一对吸引的 2^{j+1}—周期点 q_μ、r_μ，使 $S(p_\mu)=S(q_\mu)=S(r_\mu)=K(g_\mu)=\tau_j$．这时 $(g_\mu^{2^j}(x))'\mid_{p_\mu}<-1$，但 $(g_\mu^{2^{j+1}}(x))'\Big|_{q_\mu}=(g_\mu^{2^{j+1}}(x))'\Big|_{r_\mu}\in(0,1)$．两个周期轨共同占有相同的踪迹 $\tau_j=K(g_\mu)$．

最后，μ 到达 μ_{j+1}，$K(g_{\mu_{j+1}})=\tau_{j+1}^*$，开始了新的一轮循环．$q_\mu$ 与 r_μ 所在的 2^{j+1} 超期轨成超稳的，而且其中较大的一个具有踪迹 τ_{j+1}^*．

对应于分支值 $\bar{\mu}_j$，唯一的稳定(但非双曲)周期轨的实际计算是困难的. 但超稳周期轨的计算相对说容易得多. 对应的 μ_j 也容易确定. 由于 $\mu_j<\bar{\mu}_j<\mu_{j+1}$，这为 $\bar{\mu}_j$ 的估计提供了方便.

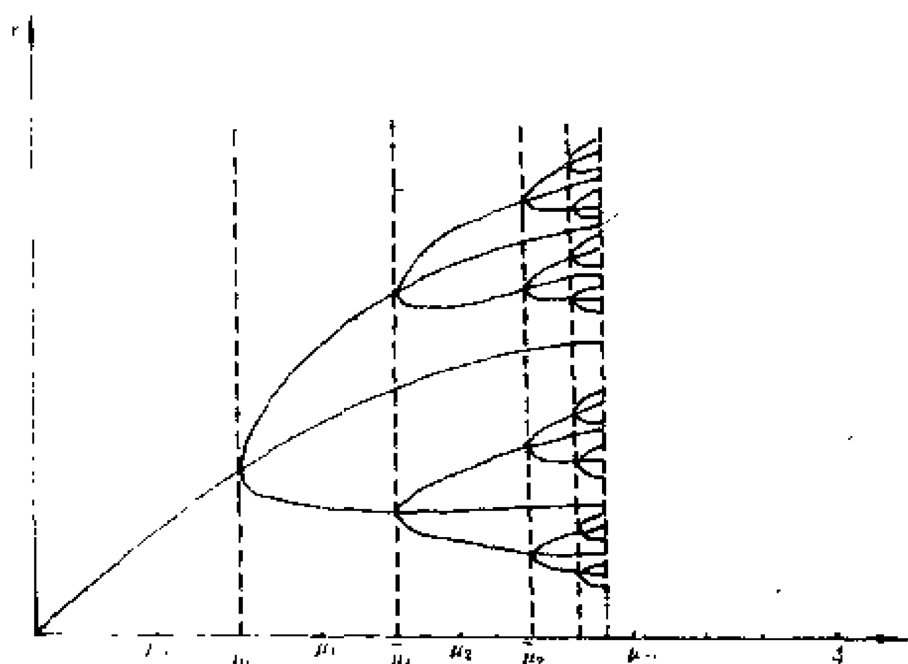


图　24.1

图 24.1 画出了 g_μ 的倍周期分支示意图，阴影部份的十分复杂的图像这里略去了. 当 μ 达到 μ_∞ 时，会出现新的一系列更复杂的现象. 有兴趣的读者，可参看本书末尾所附的有关文献资料.

附　　录

一般而言，本章内容涉及的几个主题，不是一维动力系统的特色研究. 关于结构稳定、分支与混沌的大量的深刻而引人入胜的结果，出现在二维及更高维的流形上动力系统的研究中，主要是流形上微分动力系统的研究之中. 但是，关于单峰函数的研究，特别是

研究单峰函数的踪迹方法，它联系着沙可夫斯基序与费根鲍现象，确属于一维动力系统中独放异彩的特色成果，目前，高维动力系统研究中还没有相应的丰富成果。

本章通过对二次函数族的研究介绍了有关分支、混沌及符号方法的初步知识．这方面更详细的阐述可参看文献〔56〕、〔124〕．混沌的研究与引起广泛兴趣的分形集密切相关，在高维情形下得到了大量有趣的例子，有关资料十分丰富，如〔110〕、〔127〕、〔128〕、〔119〕、〔131〕、〔135～137〕、〔143〕、〔146〕．在〔110〕和〔127〕后面附有更多的文献篇目．作为研究混沌现象的工具，符号系统上的移位映射也引起了许多进一步的研究，如〔118〕．

关于结构稳定性与分支问题，在高维情形，更多地是联系着常微分方程的定性理论，展开了极为深入而富有应用背景的研究，如〔125〕、〔126〕、〔133〕、〔134〕、〔144〕、〔145〕．在周期点处的分支，高维情形也复杂得多了，例如〔120〕．

应当提到的是，我国著名数学家，北京大学教授廖山涛先生，在高维流形上的微分动力系统研究中，特别是关于结构稳定性的研究中，有独树一帜的突出贡献．他的工作曾获第三世界科学奖和国家自然科学一等奖．在这本小书里，还无法涉及他的深刻的结果．对高维微分动力系统有兴趣的读者，可进一步读专著〔117〕，这是一本侧重于流形上的映射的结构稳定性研究的书．该书可读性强而又有一定深度．

习　题

19.1　对函数族 $F_\lambda(x)=x^3-\lambda x(\lambda>0)$ 作类似于§19中对 g_μ 所进行的讨论：

a. 对 $\lambda\in(0,1)$, 找出 F_λ 所有的周期点，并对它们分类；

b. 证明当 $|x|$ 足够大时有 $|f_\lambda^n(x)|\to+\infty$（当 $n\to+\infty$）；

c. 证明当 λ 足够大时，那些使 $F_\lambda^n(x)$ 当 $n\to+\infty$ 时，不趋于 ∞ 的 x 构成康托完全集.

20.2　设 $T_\lambda(x)=x^3+\lambda x$，求证：$\lambda\in(0,1)$ 时，T_λ 是 C^1 结构稳定的，但 $\lambda=1$ 时 $T(x)=x^3+x$ 不是 C^1 结构稳定的.

20.3　设 $S_\lambda(x)=\lambda\sin x$. 求证：若 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<1$，则 S_{λ_1} 与 S_{λ_2} 拓扑共轭，但 S_{λ_1} 与 S_{λ_2} 都不是结构稳定的.

21.4　设 $\varphi(x)$ 是分段线性函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x & (x\in[0,\frac{1}{2}])\\ 2(1-x) & (x\in[\frac{1}{2},1])\end{cases}$$

令 $S(x)=s_0s_1s_2s_3\cdots$，其中

$$s_n=\begin{cases}0 & (\text{若 }\varphi^n(x)<\frac{1}{2})\\ 1 & (\text{若 }\varphi^n(x)=\frac{1}{2})\\ 2 & (\text{若 }\varphi^n(x)>\frac{1}{2})\end{cases}$$

又设 x 的二进小数表示为

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

试找出 $0.a_2a_2\cdots a_n\cdots$ 与序列 $s_0s_1s_1\cdots$ 之间的关系.

21.5　设 A 是一个由 0 与 1 为元素构成的 $N\times N$ 方阵，符号系统 Σ_N 的子集 Σ_A 定义为

$\Sigma_A=\{(s)=(s_0s_1s_2\cdots)\mid$ 对所有的 i，A 的 s_i 行 s_{i+1} 列元素为 $1\}$

（例如，当 $N=2$ 时，若 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则对 Σ_A 中任一元素 $(s_0 s_1 s_2 \cdots)$，当 s_i 为 1 时，s_{i+1} 可以为 1 或 2，当 s_i 为 2 时，s_{i+1} 必为 2）．求证

a．在移位 σ 下，ΣA 是 ΣN 的不变的闭子集．

b．以 σ_A 记 σ 在 Σ_A 上的限制，则 Σ_A 满足 $\sigma_A^k(s)=s$ 的元素个数等于 A^k 的主对角线上元素之和．

22.6　试给出一个不具有负西瓦兹导数的实系数多项式的例．

22.7　求证映射 $S(x)=2\pi\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上有混沌性质．

23.8　讨论下列映射在指定的参数值处的分支性质：

(1)　$g_\mu(x)=\mu x(1-x)$，$\mu=3$；

(2)　$f_\lambda(x)=\lambda x(1-x^2)$，$\lambda=1,-1$；

(3)　$A_\lambda(x)=\lambda\mathrm{arctg}x$，$\lambda=-1$．

(4)　$S_\lambda(x)=\lambda\mathrm{sh}x$，$\lambda=1$

23.9　求证：在拓扑共轭变换下，同宿轨仍变为同宿轨．

23.10　求证同宿轨是非游荡的，但不是回复的．

24.11　对 $g_\mu(x)=\mu x(1-x)$，列出 $\mu=2$ 和 $\mu=3$ 时，在 g_μ 作用下 x 的可能的踪迹序列；

24.12　设 f 是 $[0,1]$ 上的单峰函数，定义重正化算子 Rf 如下

$$Rf(x)=L\circ f^2\circ L^{-1}(x)\qquad (x\in[0,1])$$

这里 L 是线性函数

$$L(x)=\frac{1}{\hat{p}-p}(x-p)$$

而 p 是 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上的不动点，$\hat{p}\in(0,\frac{1}{2})$，使 $f(\hat{p})=p$，并且 $f'(p)<0$，记 $K(f)=(a_1 a_2 a_3\cdots)$，求证：

(Ⅰ)若 Rf 是确定的而且是单峰的，则对一切 n 有 $\alpha_{2n-1}=1$；

(Ⅱ)记 $\hat{\alpha}_j=1-\alpha_j$，则 $K(Rf)=(\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_4\hat{\alpha}_6\cdots)$；

(Ⅲ)若 Rf 和 R^2f 都是单峰的，则对一切 $n=0,1,2,\cdots,\alpha_{4n+2}=0$；

(Ⅳ)若对一切 $i\leqslant N$，R^if 都是单峰的，则对一切 $j=2^Nk+2^{N-1}$，$(k=0,1,2,\cdots)$，α_j 是确定的；

(Ⅴ)若对一切 i，R^if 都是单峰的$(i=0,1,2,\cdots)$，求 $K(f)$；

(Ⅵ)对任一序列$(s)=(s_0s_1s_2\cdots)$，令 $R(s)=(\hat{s}_1\hat{s}_3\hat{s}_5\cdots)$，则按(24.10)的记号，对 $j>0$，有 $R(\tau_{j+1})=\tau_j$；

(Ⅶ)$R(\tau_\infty)=\tau_\infty$；($\tau_\infty$ 如(24.11)所定义)

(Ⅷ)若对一切 $i=0,1,2,\cdots$，R^if 都是单峰的，则 $K(f)=\tau_\infty$.

第五章　圆周上的自映射

一维流形只有线段与圆周. 线段与圆周的拓扑性质有很大的不同. 线段如果紧致,就一定有端点——边界. 圆周却是紧致没而有边界的. 作为最简单的紧致无边流形,圆周上的动力系统的研究对高维的紧致无边流形上动力系统的研究有启发性.

圆周上的自映射与线段上的自映射有本质上的不同. 例如,线段到自身的同胚是很简单的,它只可能有不动点或2—周期点. 而圆周自同胚则可以有任意周期的周期点. 又如:闭线段到自身的映射必有周期点,而圆周到自身的映射则可能没有周期点. 线段上的连续自映射有沙可夫斯基定理:有3—周期点就有n—周期点;圆周上的连续自映射则可以只有3—周期点而没有其他的周期点. 线段上的可微自映射的导数不可能处处大于1,圆周上却可能. 等等.

关于圆周上自映射的研究,已取得了丰富的成果. 本书不可能涉及那些较深入的结果. 我们只打算介绍最能反映圆周特色的两个对象:圆周自同胚及圆周上的扩张映射. 作为研究圆周映射的基本工具,先要引入"提升"的概念.

§25　从圆周到直线的提升

按习惯，本章中用 S^1 表示圆周，不失一般性，设圆半径为 1，于是 S^1 是平面上满足下列条件的点 (x,y) 之集：

$$S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, (x,y) \in R \times R\} \quad (25.1)$$

有时 $Q(x,y)$ 看成复数 $x+iy$ 是很方便的，由于 $x^2+y^2=1$，故用复数的三角形式 $e^{2\pi i\theta} = \cos 2\pi\theta + i\sin 2\pi\theta \ (0 \leqslant \theta < 1)$ 可以把圆周 S^1 上的点参数化。

由于我们对直线上的映射很熟悉，故把圆周上的映射与直线上的映射联系起来研究会很方便，这种联系的基础是复迭映射。

定义 25.1 （复迭映射）映射 $E: R \to S^1$ 定义为

$$z = E(x) = e^{2\pi i x}, (x \in R, z \in S^1) \quad (25.2)$$

叫做直线 R 到圆周 S^1 的复迭映射.（R 为全体实数之集.）

直观地看，映射 $E(x)$ 把直线 R 按 $1:2\pi$ 的比例拉伸之后在 S^1 上绕了无穷多次，因而直线上的无穷多点映到了 S^1 上的一个点。一般地，当且仅当 $(x-y)$ 是整数时，$E(x)$ 与 $E(y)$ 是圆周上的同一个点.

定义 25.2 设 $f: S^1 \to S^1$ 是圆周上的连续自映射. E 是 R 到 S^1 的复迭映射，如果存在 R 到自身的连续映射 F，满足

$$E \circ F(x) = f \circ E(x) \quad (x \in R) \quad (25.3)$$

则称 F 是 f 的一个提升.

例如，设 f 是圆周上的一个旋转，旋转角为 φ. 在 f 的作用下，圆周上的点 $e^{2\pi i\theta}$ 变为 $e^{2\pi i\theta+i\varphi}$. 如果取 F 为 $F(x) = x + \frac{\varphi}{2\pi}$，则有

$$\begin{aligned} E(F(x)) &= E\left(x + \frac{\varphi}{2\pi}\right) = e^{2\pi i\left(x+\frac{\varphi}{2\pi}\right)} = e^{2\pi i x + i\varphi} \\ &= f(e^{2\pi i x}) = f(E(x)) \end{aligned} \quad (25.4)$$

于是 F 是 f 的提升.

提升可以把圆周自映射化为直线自映射加以研究．为此，应当先弄清 f 和它的提升 F 之间的关系．

定理 25.3　设 $f: S^1 \to S^1$ 是连续映射，则

（Ⅰ）　存在 f 的提升 $F: R \to R$；

（Ⅱ）　提升 F 满足条件

$$F(x+1) - F(x) = k, \quad (k\text{ 是只与 }F\text{ 有关的整数}) \tag{25.5}$$

（Ⅲ）　对任意整数 l，若 F 是 f 的提升，则 $F+l$ 也是．并且 f 的任意提升可表为 $F+l$ 的形式．

证明　由于 f 是连续的，可以取足够大的 n，把圆周等分为 n 份：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得当圆周上两点 z_1, z_2 属于同一个弧段 A_j 时，点 $f(z_1)$ 与 $f(z_2)$ 之间的劣弧不超过圆周的 $\frac{1}{8}$．

用复数 $e^{2\pi i\theta}$ 表示圆周上的点，约定 $0 \leqslant \theta < 1$．设 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的端点对应的 θ 顺次为：$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$，记这些端点为 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$．于是复迭映射 E 把 $x=0$ 映为 z_0．设 $f(z_0) = e^{2\pi i\theta_0}$，$(0 \leqslant \theta_0 < 1)$，则定义：

$$F(0) = \theta_0 \tag{25.6}$$

用不完全归纳法，设我们已确定了 F 在 $\left[0, \frac{k}{n}\right]$ 上的值，现在我们在区间 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ 上来确定 $F(x)$ 的值．对任一点 $x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$，如果已知 $F(\frac{k}{n})$ 满足

$$e^{2\pi i F\left(\frac{k}{n}\right)} = f\left(e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}}\right) \tag{25.7}$$

我们指出，必能唯一地确定 $F(x)$ 的值，使 F 在 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ 上连续，且满足

$$e^{2\pi i F(x)} = f\left(e^{2\pi i x}\right) \tag{25.8}$$

事实上，若已知 $F\left(\frac{k}{n}\right)=x_k$，则有 $e^{2\pi i F\left(\frac{k}{n}\right)}=e^{2\pi i x_k}=f\left(e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)=z_k$. 考虑弧段 $\widehat{z_kz_{k+1}}$（若 $k+1=n$，令 $z_n=z_0$）在映射 $E: R\to S^1$ 之下的逆象 $F^{-1}(\widehat{z_kz_{k+1}})$，它是实轴上的无穷多区间 $I_j(j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 其中 I_j 向右平移单位距离之后成为 I_{j+1}. 由于 $\widehat{z_kz_{k+1}}$ 不超过圆周的 $\frac{1}{8}$，故每个 I_j 的长不超过 $\frac{1}{8}$，所以它们两两不相交. 因此，只有一个区间，设它为 I_m，包含 z_k 的逆象之一 x_k. 记 E_k^{-1} 为 E 在 I_m 上的限制 E_k 的逆，则 E_k^{-1} 是 $\widehat{z_kz_{k+1}}$ 到 I_m 上的同胚，满足

$$\begin{cases} E_k^{-1}\circ E(x)=x & (x\in I_m) \\ E\circ E_k^{-1}(z)=z & (z\in \widehat{z_kz_{k+1}}) \end{cases} \tag{25.9}$$

于是，令

$$F(x)=E_k^{-1}\circ f\circ E(x)\qquad \left(x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right) \tag{25.10}$$

这就唯一地确定了 F 在 $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ 上的值. 由不完全归纳法，我们已从初值 $F(0)=\theta_0$ 出发，唯一地确定了在 $[0,1]$ 上有定义，连续，且满足(25.8)即

$$E\circ F(x)=f\circ E(x)\qquad (x\in[0,1]) \tag{25.11}$$

的 $F(x)$.

在(25.11)中分别取 $x=0,1$，可得

$$E\circ F(0)=f\circ E(0)=f\circ E(1)=E\circ F(1) \tag{25.12}$$

可见 $F(1)$ 与 $F(0)$ 之差为一整数，即 $F(1)-F(0)=k$. 利用关系式

$$F(x+1)=F(x)+k\qquad (x\in[0,1]) \tag{25.13}$$

可以把 F 连续地从 $[0,1]$ 开拓到 $[1,2]$；进一步归纳地开拓到整个 $(-\infty,+\infty)$，这证明了(Ⅰ).

为证明(Ⅱ)，只要指出，由 F 满足(25.3)，可得

$$E\circ F(x)=f\circ E(x)=f\circ E(x+1)=E\circ F(x+1) \tag{25.14}$$

故 $F(x+1)-F(x)$ 是整数. 由连续性，对不同的 x 这个整数不能不同. (Ⅱ)得证.

设 F 是 f 的提升，F 连续，则 $F(x)+l$ 也连续，而且由 F 满足(25.3)，得

$$E\circ(F(x)+l)=E\circ F(x)=f(E(x)) \tag{25.15}$$

即知 $F+l$ 也是提升. 设 G 是 f 的任一个提升，则应有

$$E\circ G(x)=f(e(x))=E\circ F(x) \tag{25.16}$$

可见 $G(x)$ 与 $F(x)$ 的差是整值函数. 但 $G(x)-F(x)$ 连续，故知 $G(x)$ 与 $F(x)$ 的差是一个固定的整数. 证毕.

根据上述定理可知，f 的两个提升 F 与 G，有关系，

$$F(x+1)-F(x)=G(x+1)-G(x)=k \tag{25.17}$$

这个整数 k 不依赖于 x，也不依赖于提升 F 或 G 的选取，它只与 $f:S^1\to S^1$ 有关. 把 $k=F(x+1)-F(x)$ 叫做 f 的映射度，记为

$$\deg(f)=k \tag{25.18}$$

下面几个与 $\deg(f)$ 有关的命题，在讨论圆周自映射时是很有用的

定理 25.4 设 F、G 分别是圆周自映射 f、g 的提升，又记 $id: S^1\to S^1$ 为恒同映射，则

(Ⅰ) $G\circ F$ 是 $g\circ f$ 的提升；

(Ⅱ) $\deg(g\circ f)=\deg(g)\cdot\deg(f)$；

(Ⅲ) $\deg(id)=1$

(Ⅳ) 若 $h: S^1\to S^1$ 是同胚，则 $\deg(h)=\deg(h^{-1})=\pm1$.

证明 (Ⅰ)由提升之定义，有

$$E\circ(G\circ F)=(E\circ G)\circ F=(g\circ E)\circ F=g\circ(E\circ F)$$

$$=g\circ(f\circ E)=(g\circ f)\circ E$$

这证明了 $G\circ F$ 是 $g\circ f$ 的提升.

(Ⅱ)由(Ⅰ),$(g\circ f)$的提升是 $G\circ F$,由 $\deg(g\circ f)$之定义,得 $G(x+m)-G(x)=m\deg(g)$,因而:

$$\begin{aligned}\deg(g\circ f)&=G\circ F(x+1)-G\circ F(x)\\&=G\circ(F(x)+\deg(f))-G\circ F(x)\\&=G\circ F(x)+\deg(g)\cdot\deg(f)-G\circ F(x)\\&=\deg(g)\cdot\deg(f)\end{aligned}$$

于是(Ⅱ)得证.

(Ⅲ) 显然,实轴上的恒同映射 $Id(x)=x$ 是 $id: S^1\to S^1$ 的提升,故有

$$\deg(id)=Id(x+1)-Id(x)=(x+1)-x=1$$

(Ⅳ) 利用(Ⅱ)及(Ⅲ)得:

$$\deg(h)\cdot\deg(h^{-1})=\deg(h\circ h^{-1})=\deg(id)=1$$

由于 $\deg(h)$ 与 $\deg(h^{-1})$ 都是整数,故 $\deg(h)=\deg(h^{-1})=\pm1$. 证毕.

如果同胚 $h: S^1\to S^1$ 的映射度为 1,称 h 为保向的. 若它的映射度为 -1,则称它为反向的. 利用映射度的计算可知,有

定理 25.5 设 $h: S^1\to S^1$ 是同胚,H 是 h 的提升. 则 H 是 R 到自身的同胚,而且 H^{-1} 是 h^{-1} 的提升.

证明 设 K 是 h^{-1} 的提升. 由定理 25.4 之(Ⅰ),$H\circ K$ 和 $K\circ H$ 都是 $id=h\circ h^{-1}=h^{-1}\circ h$ 的提升,因而由 Id 是 id 的提升可得

$$\begin{cases}H\circ K=Id+l\\K\circ H=Id+m\end{cases}\tag{25.19}$$

由上面前一式可知,H 的像是全实轴,由后一式可知,对不同的 x_1 与 x_2,有 $H(x_1)\neq H(x_2)$,这证明了 H 是 R 上的同胚. 为了证明 H^{-1} 是 h^{-1} 的提升,从等式

$$H \circ H^{-1} = M \qquad (25.20)$$

出发，两端用 E 作用，得

$$E \circ H \circ H^{-1} = E \qquad (25.21)$$

因 H 是 h 的提升，知 $E \circ H = h \circ E$，故由(25.21)，得

$$h \circ E \circ H^{-1} = E \qquad (25.22)$$

两端用 h^{-1} 作用之，得

$$E \circ H^{-1} = h^{-1} \circ E \qquad (25.23)$$

这证明了 H^{-1} 是 h^{-1} 的提升. 证毕.

§26　圆周自同胚的旋转数

设 $f: S^1 \to S^1$ 是圆周到自身的保向同胚，F 是它的提升. 若 f 把 S^1 上一点 z_0 映为 $z_1 = f(z_0)$，记 x_0 是 z_0 在复迭映射 E 之下的原像，$F(z_0) = x_1$ 是 z_1 的原像，则弧 $\widehat{z_0 z_1}$ 对应的圆心角可以用实数 $x_1 - x_0$ 来度量——当 $x_1 - x_0 = \frac{1}{2}$ 时，$\widehat{z_0 z_1}$ 所对的圆心角为 π. 考虑 f 作用于 z_0 反复 n 次的平均旋转角：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F^i(x_0) - F^{i-1}(x_0)) = \frac{F^n(x) - x}{n} \qquad (26.1)$$

一个重要的有趣结果是：当 $n \to +\infty$ 时，(26.1)的右端——平均旋转角有确定的极限，这个极限仅仅依赖于 F，而不依赖于变量 x 的选择.

定理 26.1　设 $f: S^1 \to S^1$ 是保向同胚，F 是 f 的一个提升，则极限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(x)}{n} \qquad (26.2)$$

存在，且仅与 F 有关. 记此极限为 $\rho(F)$. 如果对整数 l 有 $F_1 = F + l$，

则有

$$\rho(F_l) = \rho(F) + l \tag{26.3}$$

证明　由定理 25.5 可知，F 是同胚. 由定理 25.4，又知

$$F(x+1) - F(x) = 1 = \deg(f) \tag{26.4}$$

可见，F 严格递增. 对于任意正整数 k，用归纳法易证

$$F^k(x+1) - F^k(x) = 1 \tag{26.5}$$

由(26.5)得

$$F^k(x+1) - (x+1) = F^k(x) - x \tag{26.6}$$

可见，$F^k(x)-x$ 是具有周期 1 的函数.

任取 $x\in[0,1]$，由 F 递增知 F^k 递增，因而

$$F^k(0) \leqslant F^k(x) \leqslant F^k(1) = F^k(0) + 1 \tag{26.7}$$

由 $x\geqslant0$ 及 $x-1\leqslant0$，由(26.7)得

$$F^k(0) - 1 + x \leqslant F^k(x) \leqslant F^k(0) + 1 + x \tag{26.8}$$

即当 $x\in[0,1]$时，有

$$F^k(0) - 1 \leqslant F^k(x) - x \leqslant F^k(0) + 1 \tag{26.9}$$

但因 $F^k(x)-x$ 有周期 1，故(26.9)对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$成立。在(26.9)中取 $k=n$，任取 x_0，并依次取 $x_j=F^{nj}(x_0)(j=0,1,2\cdots,m-1)$代入(26.9)，得

$$F^n(0) - 1 \leqslant F^n(F^{nj}(x_0)) - F^{nj}(x_0) \leqslant F^n(0) + 1$$
$$(j = 0,1\cdots,m-1)$$
$$(26.10)$$

即

$$F^n(0) - 1 \leqslant F^{(j+1)n}(x_0) - F^{jn}(x_0) \leqslant F^n(x_0) + 1$$
$$(j = 0,1,\cdots,m-1)$$
$$(26.11)$$

把(26.11)中各式对 $j=0,1,2,\cdots,m-1$ 求和，得

$$m(F^n(0)-1)\leqslant F^{mn}(x_0)-x_0\leqslant m(F^n(0)+1) \quad (26.12)$$

将(26.12)用 mn 除，得

$$\frac{F^n(0)}{n}-\frac{1}{n}\leqslant\frac{F^{mn}(x_0)-x_0}{mn}\leqslant\frac{F^n(0)}{n}+\frac{1}{n} \quad (26.13)$$

即

$$-\frac{1}{n}\leqslant\frac{F^{mn}(x_0)-x_0}{mn}-\frac{F^n(0)}{n}\leqslant\frac{1}{n} \quad (26.14)$$

交换 m 与 n，得

$$-\frac{1}{m}\leqslant\frac{F^{mn}(x_0)-x_0}{mn}-\frac{F^m(0)}{m}\leqslant\frac{1}{m} \quad (26.15)$$

由(26.14)与(26.15)相减，得

$$\left|\frac{F^n(0)}{n}-\frac{F^m(0)}{m}\right|\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \quad (26.16)$$

由柯西准则可知，下列极限存在，记为 ρ_0：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(0)}{n}=\rho_0 \quad (26.17)$$

再利用(26.9)，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F^n(0)}{n}-\frac{1}{n}\right)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}\leqslant\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{F^n(0)}{n}+\frac{1}{n}\right) \quad (26.18)$$

这证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}$ 与 x 无关，对任一 x，它均为 ρ_0，于是可记 $\rho(F)=\rho_0$. 又若 $F_1(x)=F(x)+l$，由 $F(x+1)=F(x)+1$，易知 $F(x+l)=F(x)+l$，于是

$$F_1(F_1(x))=F(F(x)+l)+l=F(F(x))+2l \quad (26.19)$$

归纳地易证 $F_1^n(x)=F^n(x)+nl$，从而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_1^n(x)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{F^n(x)}{n}+l\right) \quad (26.20)$$

证毕.

根据上述定理，对于保向同胚 f 的任意两个提升 F_1 和 F，必有

$$\rho(F_1) = \rho(F) \pmod{1} \tag{26.21}$$

即 $\rho(F_1)$ 和 $\rho(F)$ 的小数部份相等，我们把这个共同的小数部份 $\{\rho(F)\}$ 叫做 f 的旋转数，记为 $\rho(f)$：

$$\rho(f) = \{\rho(F)\} \tag{26.22}$$

关于 $\rho(F)$ 与 $\rho(f)$，有下列性质.

定理 26.2 设 f，g 都是 S^1 到自身的保向同胚，F 和 G 分别是 f 和 g 的提升，则

(i) 对一切整数 l，$\rho(F^l) = l\rho(F)$；

(ii) 若 $h: S^1 \to S^1$ 是保向同胚，使 $h \circ f = g \circ h$，则

$$\rho(f) = \rho(g) \tag{26.23}$$

(iii) 若 $h: S^1 \to S^1$ 是反向同胚，使 $h \circ f = g \circ h$，则

$$\rho(f) + \rho(g) = 1 \text{ 或 } 0 \tag{26.24}$$

证明 先证(i). 若 $l=0$，显然有

$$\rho(F^l) = \rho(F^0) = \rho(Id) = 0. \tag{26.25}$$

下面考虑 l 为正整数之情形；此时有

$$\rho(F^l) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{ln}(x)}{n} = l \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{ln}(x)}{ln} = l \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n} = l\rho(F) \tag{26.26}$$

若 l 为负整数，在(26.9)中取 $k=|ln|$，$x=F^{ln}(t)$，得

$$F^{|ln|}(0) - 1 \leqslant t - F^{ln}(t) \leqslant F^{|ln|}(0) + 1 \tag{26.27}$$

上式除以 n 并取极限，可得

$$\rho(F^l) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{ln}(x)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{|ln|}(0)}{-n}$$

$$= l \lim_{n\to+\infty} \frac{F^{|ln|}(0)}{|ln|} = l\rho(F) \tag{26.28}$$

这证明了(i).

(ii) 设 H 是 h 的提升，由定理 25.4 之(i)可知，$G\circ H$ 和 $H\circ F$ 分别是 $g\circ h$ 和 $h\circ f$ 的提升，由假设 $h\circ f=g\circ h$ 得知有整数 k，使

$$G\circ H = H\circ F + k \tag{26.29}$$

两端逐次用 G 作用之，得

$$G^n\circ H = H\circ F^n + nk \tag{26.30}$$

这是因为可仿下式递推之故：

$$\begin{aligned} G(G\circ H) &= G(H\circ F + k) = G\circ H(F) + k \\ &= H\circ F(F) + k + k = H\circ F^2 + 2k \end{aligned} \tag{26.31}$$

将(26.30)除以 n，得

$$\frac{G^n(H(x))}{n} = \frac{H(F^n(x))}{n} + k \tag{26.32}$$

因为 $H(x)-x$ 也是连续周期函数，故有常数 $M>0$，使

$$|H(F^n(x)) - F^n(x)| < M \tag{26.33}$$

因而

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{H(F^n(x)}{n} - \frac{F^n(x)}{n}\right| = 0 \tag{26.34}$$

这表明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{H(F^n(x))}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n}$. 于是令(26.32)中 $n\to+\infty$ 取极限，即得

$$\rho(G) = \rho(F) + k \tag{26.35}$$

因为 k 是整数，故 $\{\rho(G)\}=\{\rho(F)\}$，即 $\rho(g)=\rho(f)$.

(iii)若 h 是反向自同胚，则由定理 25.4 之(iv)及定理之后所述关于反向同胚的规定，有 $\deg(h)=-1$，因而 $H(x+1)=H(x)-1$，这表明 $H(x)+x$ 是周期函数，从而(26.33)变成

$$|H(F^n(x)) + F^n(x)| < M \tag{26.36}$$

由之推出

$$\rho(G) = -\rho(F) + k \tag{26.37}$$

即 $\rho(g)+\rho(f)=0$ 或 1，证毕

下面的定理表明，$\rho(f)$是有理数或无理数，将从根本上决定同胚 f 的性质.

定理 26.3　设 $f:S^1\to S^1$ 是保向同胚，则 $\rho(f)$为有理数的充分必要条件是 f 有周期点. 若 $\rho(f)=\frac{L}{N}$，$(L,N)=1$，则 f 的所有周期点均为 N—周期点.

证明　设 F 是 f 的提升，若 z_0 是 f 的 N-周期点，又设 $x_0\in R$ 使 $E(x_0)=z_0$，则 $F^N(x_0)-x_0=M$ 是整数，而且对 $k=1,2,\cdots,N-1$，$F^k(x_0)-x_0$ 都不是整数。这时，有

$$F^{(j+1)N}(x_0) = F^{jN}(F^N(x_0)) = F^{jN}(x_0+M) = F^{jN}(x_0)+M \tag{26.38}$$

因而

$$\rho(F) = \lim_{n\to+\infty}\frac{F^{nN}(x_0)}{nN} = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_0+nM}{nN} = \frac{M}{N} \tag{26.39}$$

故 $\{\rho(F)\}=\rho(f)$ 为有理数. 我们指出：必有$(M,N)=1$. 因而 $\rho(f)$的既约形式之分母为 N，这表明 f 只有 N—周期点，因为 $\rho(f)$的既约形式是唯一的.

事实上，若$(M,N)=k>1$，设 $M=kM'$，$N=kN'$，取适当的整数 l，使

$$x_0+l<F^{N'}(x_0)<x_0+l+1 \tag{26.40}$$

则得

$$F^{N'}(x_0)+l<F^{2N'}(x_0)<F^{N'}(x_0)+l+1 \tag{26.41}$$

递推之，得

$$l<F^{(j+1)N'}(x_0)-F^{jN'}(x_0)<l+1 \tag{26.42}$$

将上式对 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 相加，得

$$kl < F^{kN'}(x_0) - x_0 < k(l+1) \tag{26.43}$$

由 $kN' = N$，得

$$kl < M = kM' < k(l+1) \tag{26.44}$$

这表明 $l < M' < l+1$，这个矛盾表明 $(M,N)=1$.

现在设 $\rho(f)$ 为有理数，往证 f 有周期点. 设 $\rho(f) = \frac{L}{N}$，并设 F 是 f 的提升，由定理 26.2 可知，$\rho(F^N)$ 为整数. 用反证法. 若 f 无周期点，则 f^N 无不动点. 于是 $F^N(x)-x$ 对任一 x 不取整数值，从而有整数 k，使

$$k < F^N(x) - x < k+1 \tag{26.45}$$

由于 $F^N(x)-x$ 以 1 为周期，故有 α、β，使

$$k < \alpha \leqslant F^N(x) - x \leqslant \beta < k+1 \tag{26.46}$$

取 $x = F^{jN}(t)$，得

$$\alpha \leqslant F^{(j+1)N}(t) - F^{jN}(t) \leqslant \beta \tag{26.47}$$

对 $j=0,1,2,\cdots,n-1$ 相加，得

$$n\alpha \leqslant F^{nN}(t) - t \leqslant n\beta \tag{26.48}$$

同用 n 除取极限，得

$$\alpha \leqslant \rho(F^N) \leqslant \beta \tag{26.49}$$

但 $k<\alpha\leqslant\beta<k+1$，这与 $\rho(F^N)$ 为整数矛盾. 证毕.

我们看到，$\rho(f)$ 为有理数 $\frac{L}{N}$ 时，f 的性状是比较简单的. 它只有 N-周期点. 下节讨论 $\rho(f)$ 为无理数的情形.

§27. 无周期点的圆周自同胚

设 $f: S^1 \to S^1$ 是圆周到自身的保向同胚，并且设其旋转数 $\rho(f)$

是无理数. 由定理 26.3 可知, f 不可能有周期点.

这种无周期点的圆周自同胚的最简单的例子是, 圆周的无理旋转, 即同胚

$$\tau_\theta : z \to z e^{2\pi i\theta} \tag{27.1}$$

这里, θ 是一个无理数.

象(27.1)这样的无理旋转具有一个基本特点: 任取一点 z_0, 得到的轨道在 S^1 上稠密. 也就是说, 任取一个 S^1 上的开弧 Δ, 总有自然数 m, 使 $\tau_\theta^m(z_0) \in \Delta$. 证明很简单: 设 Δ 的长度为 d, 取 N 充分大, 使得 $\frac{2\pi}{N} < d$, 即使 Δ 的长度大于圆周长的 $\frac{1}{N}$. 考虑圆周上的点组

$$z_k = \tau_\theta^k(z_0) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, N) \tag{27.2}$$

这 $N+1$ 个点中, 总有两点 z_t、z_s, 使弧 $\overset{\frown}{z_t z_s}$ 之长小于 $\frac{2\pi}{N} < d$. 不妨设 $s > t$, 记 $n_0 = s - t$, 则对任一点 z, 点 z 与 $\tau_\theta^{n_0}(z)$ 之间的弧长小于 d, 因而点列 $\tau_\theta^{kn_0}(z)(k=0,1,2,\cdots)$ 中, 必有落入开弧 Δ 的点。这正是我们要证明的.

现在考虑任一点 z_0 出发, 在 f 的作用下产生的轨道 $f^k(z_0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 这时, 有两种可能性:

第一种: $\{f^k(z_0)\}$ 在 S^1 上稠密;

第二种: $\{f^k(z_0)\}$ 在 S^1 上不稠密.

下面指出, 在第二种情形, f 的任一条轨道都不会在 S^1 上稠密.

命题 27.1　设 $f: S^1 \to S^1$ 是圆周到自身的保向同胚, f 无周期点. 对某一点 $z_0 \in S^1$, 记轨道 $\{f^k(z_0), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 的闭包为 Λ. 如果 Λ 不是整个 S^1, 则

(i)　Λ 在 S^1 上是无处稠密的. 也就是说, Λ 关于 S^1 的余集是处处稠密的开集,

(ii)　f 的任一条轨道 $\{f^k(z), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 在 S^1 上无处稠密，

(iii)　f 的任一条轨道 $\{f^k(z), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 的极限点集被包含于 Λ 中.

证明　设 (α, β) 是 Λ 关于 S^1 的余集的一个构成区间——即 $(\alpha, \beta) \subset \complement \Lambda$，但 $\alpha, \beta \in \Lambda$. 则对任意的整数 n，$f^n(\alpha, \beta)$ 是 $S^1 \setminus \Lambda$ 的构成区间. 因为 f 无周期点，故这些 $f^n(\alpha, \beta)$ 两两不相交. 这表明 f 的任一轨道 $\{f^k(z)\}$ 与任一个 $f^n(\alpha, \beta)$ 至多交于一点. 从而区间 $f^n(\alpha, \beta)$ 内不可能有 $\{f^k(z)$ 的极限点，即 $\{f^k(z)\}$ 的极限点只能在 Λ 中，这证明了(iii).

为证明(i)与(ii)，只要指出 Λ 没有内点即可. 用反证法. 若 Λ 的内点之集非空，则所有 Λ 的内点组成开集 G. 设 (α, β) 是 G 的构成区间，则对任意整数 n，$f^n(\alpha, \beta)$ 也是 G 的构成区间. 由于 f 无周期点，故当 $n \neq m$ 时，$f^n(\alpha, \beta)$ 与 $f^m(\alpha, \beta)$ 不相交. 故每个区间 $f^n(\alpha, \beta)$ 内至多含有轨道 $\{f^k(z_0)\}$ 的一个点. 这表明 $f^n(\alpha, \beta)$ 内没有 $\{f^k(z_0)\}$ 的极限点，这与 Λ 的定义矛盾. 证毕.

由命题 27.1 立刻得到

推论 27.2　若有 $z_0 \in S^1$ 使轨道 $\{f^k(z_0)\}$ 在 S^1 上稠密，则 f 的任一轨道 $\{f^k(z)\}$ 在 S^1 上稠密. 这里 f 是 S^1 上的无周期点的保向自同胚.

我们对这种轨道稠密的自同胚特别给个名称：

定义 27.3　设 $f: S^1 \to S^1$ 是圆周上无周期点的保向自同胚. 如果有 $z_0 \in S^1$ 使轨道 $\{f^k(z_0), k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 在 S^1 上稠密，则称 f 为遍历的，

这样，无周期点的圆周自同胚就被分成了两类：遍历的与非遍历的. 即前述的第一种与第二种. 下面的定理告诉我们，若 f 是遍

历的，则它的动力系性质与无理旋转是一样的.

定理 27.4　设 $f:S^1\to S^1$ 是无周期点的保向同胚. 如果 f 是遍历的，则 f 与圆周的无理旋转 τ_α 拓扑共轭. 这里 $\alpha=\rho(F)$，F 是 f 的任一个提升.

证明　引进两个实数集：

$$A=\{F^k(0)+m\mid m,k\text{ 为任意整数}\}$$

$$B=\{k\alpha+m\mid m,k\text{ 为任意整数}\}$$

我们定义一个映射 $H:A\to B$，使之满足

$$H(F^k(0)+m)=k\alpha+m \tag{27.3}$$

于是，我们有

(i)　H 是保序的，一对一的满映射，满足

$$H(a+1)=H(a)+1\qquad(\text{对任意 } a\in A) \tag{27.4}$$

(ii)　$H:A\to B$ 是连续映射.

(iii)　H 可唯一地开拓为实数集到自身的保序同胚：$H:R\to R$

(iv)　H 在实数集上仍满足

$$H(x+1)=H(x)+1\qquad(\text{对任意 } x\in R) \tag{27.5}$$

首先证明(i)，先指出定义(27.3)是确定的. 为此，只要指出，对不同的 (k,m)，$F^k(0)+m$ 也一定不同. 事实上，若

$$F^k(0)+m=F^l(0)+n \tag{27.6}$$

两端都用 F^{-l} 作用之，得

$$F^{k-l}(0)+m=n \tag{27.7}$$

由于 f 无周期点，故 $F^p(0)$ 当 $p\neq0$ 时，不可能为整数，于是 $k-l=0$，即 $k=l$，又由 $k-l=0$ 得 $m=n$. 这证明了实数 $F^k(0)+m$ 唯一地确定了 (k,m)，因而定义(27.3)是合理的.

要完成(i)的证明，只要证明 H 保序及(27.4)成立. 因为 H 是

满映射是显然的，且保序性即可保证一对一.

设有

$$F^k(0)+m<F^l(0)+n \tag{27.8}$$

为证 $k\alpha+m<l\alpha+n$，用 F^{-l} 作用于(27.8)，得

$$F^{k-l}(0)+m<n \tag{27.9}$$

即

$$F^{k-l}(0)<n-m \tag{27.10}$$

$$F^{p(k-l)}(0)<p(n-m) \tag{27.11}$$

结合 $\alpha=\rho(F)$ 之定义，得

$$\alpha=\lim_{p\to+\infty}\frac{F^{p(k-l)}(0)}{p(k-l)}\begin{cases}<\dfrac{n-m}{k-l} & (\text{当 } k>l)\\[2mm] >\dfrac{n-m}{k-l} & (\text{当 } k<l)\end{cases} \tag{27.12}$$

因而

$$(k-l)\alpha<n-m \tag{27.13}$$

即

$$k\alpha+m<l\alpha+n \tag{27.14}$$

又，对任意的 $a=F^k(0)+m$，显然有

$$\begin{aligned}H(a+1)&=H(F^k(0)+m+1)=k\alpha+m+1\\&=H(F^k(0)+m)+1=H(a)+1\end{aligned} \tag{27.15}$$

这完成了(i)的证明.

前已指出，圆周上的无理旋转，它的每条轨道都是稠密的. 经过提升，过 $z=0$ 的轨道变为实数集 $\{k\alpha+m\}$，故 $B=\{k\alpha+m\}$ 在实数轴上稠密. 由于 $H:A\to B$ 保序，由像集 B 之稠密性，即知 H 在 A 上连续，这证明了(ii).

由假设 f 是遍历的，因而轨道 $\{f^k(z_0)\}$ 在圆周上稠密. 提升之后，轨道 $\{f^k(z_0)\}$（当 $F(0)=z_0$ 时）变为实数集 $A=\{F^k(0)+m\}$，由于 A 和 B 都是实数轴上的稠密集，保序映射 $H:A\to B$ 显然可开拓为 R 到自身的同胚，方法如下：对任一个 $x\in A$，可把 A 分为两个集合

$$\begin{cases} L = A\cap(-\infty,x) \\ U = A\cap(x,+\infty) \end{cases} \tag{27.16}$$

于是，B 相应地被分为 $H(L)$ 与 $H(U)$ 两个集合. 由 $H(L)$ 与 $H(U)$ 可确定实数集的一个分割，这个分割确定的实数即定义为 $H(x)$. 显然 $H(x)$ 是同胚. 于是(iii)得证.

要证明(iv)是容易的. 由 A 之稠密性，取极限即可把 A 上的等式(27.15)拓广到全实数集.

下面来完成定理 27.4 的证明.

首先，H 在 A 上满足

$$\begin{aligned} H\circ F(F^k(0)+m) &= H(F^{k+1}(0)+m) \\ &= (k+1)\alpha+m \\ &= \alpha+H(F^k(0)+m) \end{aligned} \tag{27.17}$$

即对 $a\in A$，有

$$H\circ F(a) = \alpha+H(a) \qquad (a\in A) \tag{27.18}$$

由于 A 在实数轴上稠密，故对一切实数 x，有

$$H\circ F(x) = \alpha+H(x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{27.19}$$

又由(27.5)，可得

$$H(H^{-1}(x)+1) = H(H^{-1}(x))+1 = x+1 \tag{27.20}$$

两端用 H^{-1} 作用之，得

$$H^{-1}(x)+1 = H^{-1}(x+1) \tag{27.21}$$

于是 H 与 H^{-1} 分别是 S^1 上的某个同胚 h 及其逆 h^{-1} 的提升. 用复

迭映射 E 作用于(27.19)，得

$$E\circ H\circ F\circ E=E(a+H\circ E) \tag{27.22}$$

由提升之定义，得

$$h\circ f\circ E=\tau_a\circ h\circ E \tag{27.23}$$

因为 $E:R\to S^1$ 是满映射，故在 S^1 上，有

$$h\circ f=\tau_a\circ h \tag{27.24}$$

这证明了 f 与 τ_a 拓扑共轭. 证毕.

这样，一个重要的问题就提了出来：当 f 满足什么条件时，它是遍历的呢？下面定理很好地回答了这个问题.

定理 27.5　(Denjoy 定理)设 $f:S^1\to S^1$ 是无周期点的保向同胚. 如果 f 具有不取零值的有界变差的微商(亦即，f 的提升 F 具有不取零值的有界变差微商)，则 f 是遍历的.

本书中不介绍这个定理的证明了. 有兴趣的读者可参看文献[117].

根据定理 27.5 可知，如果 f 的提升 F 有二阶连续导数，而且 F' 恒不为零，则 f 遍历. 一般说来，这是一个不苛刻的条件.

一个反面的问题是：若仅仅要求 F' 连续，对应的 f 会不会不是遍历的呢？确实可能. 构造非遍历的无周期点的圆周保向自同胚的思路是：取 f 的一个轨道 $\{f^k(z_0),k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，把点 $z_k=f^k(z_0)$"切开"，切开处嵌进一个小小的开区间 Δ_k，并使 Δ_k 之长不超过 $2^{-|k|}\varepsilon$，这里 $\varepsilon>0$ 可任意给定. 把 f 的定义开拓到诸 Δ_k 上，使 f 同胚地把 Δ_k 变为 Δ_{k+1}，并保持 f 的连续可微性. 完成这些工作，只需一些技术细节的处理.

§28　圆周上的扩张映射

线段到自身的光滑映射，不可能处处扩张．即不可能把每个区间都放大，或者说，不可能使导数的绝对值处处大于 1．但在圆周上，这却是可能的．扩张映射的存在，反映了圆周区别与线段的拓扑特点．

先给出定义：

定义 28.1　设 $f:S^1\to S^1$ 是圆周到自身的映射，F 是 f 的一个提升．若 F 有连续导数 F'，并且

$$|F'(x)|>1\qquad(\text{对任意实数 } x)\tag{28.1}$$

则称 f 是 S^1 上的扩张映射．

注意到 $F(x+1)=F(x)+k$，这里 $k=\deg(f)$ 是与 x 无关的常数，故有 $F'(x+1)=F'(x)$．即 F' 是周期函数．由(28.1)及 F' 连续，可得有 $\lambda>1$，使

$$|F'(x)|\geqslant\lambda>1\tag{28.2}$$

扩张映射的最简单的例子是 $f(z)=z^m$，这里 $|m|>1$．事实上，$F(x)=mx$ 是 $f(z)=z^m$ 的一个提升，而 $|F'(x)|=|m|>1$．当然，m 是整数．

扩张映射的一个重要特点是，它具有混沌性质．为了证明这一点，只要指出有正整数 p*，使 $g=f^p$ 在 S^1 的某个子集上与 Σ_2 上的移位映射 σ 拓扑共轭就够了．实现这一证明的思路如下：

在 S^1 上任取两个无公共点的闭弧段 A_0 与 A_1．由扩张性，对足够大的 p，$g=f^p$ 把 A_0 和 A_1 都变得如此之大，以至 $g(A_0)$ 和 $g(A_1)$ 都覆盖了 S^1．考虑那些轨道不超出 $A_0\cup A_1$ 的点之集合 Λ．若 $z\in\Lambda$，则可定义 z 的踪迹序列 $s(z)$：

---

* 事实上，可取 $p=1$．因为扩张映射的映射度绝对值 $|F(x+1)-F(x)|=|F'(\xi)|>1$，故 $|\deg(f)|\geqslant2$，于是 f 把 S^1 的一小半或一半映为 S^1．

$$s(z) = s_0 s_1 s_2 \cdots \tag{28.3}$$

其中 s_k 取值 0 或 1，使

$$s_k = \begin{cases} 0 & (\text{若 } g^k(z) \in A_0) \\ 1 & (\text{若 } g^k(z) \in A_1) \end{cases} \tag{28.4}$$

则易证映射 $s: A \to \Sigma_2$ 是 A 到 Σ_2 的同胚，而且

$$s \circ g = \sigma \circ s \tag{28.5}$$

即 s 是 g 与移位映射 σ 的一个拓扑共轭. 证明的方法类似于 §10 中处理例 10.2 的方法，此处不详述了.

扩张映射的另一个重要特点是它具有结构稳定性. 为此，我们先证明：如果两个映射 f 与 g 很接近，则它们有相同的映射度：

定理 28.2　设 g 与 f 都是圆周到自身的连续映射. 若有 f 的和 g 的各一个提升 F 及 G，满足

$$|F(x) - G(x)| < \frac{1}{2} \quad (\text{对一切实数 } x) \tag{28.6}$$

则有

(i)　$\deg(f) = \deg(g)$

(ii)　对于 g 的任一提升 G 和 f 的任一提升 F，$G-F$ 是具有周期 1 的函数.

证明　由于

$$\begin{aligned} &|\deg(f) - \deg(g)| \\ &= |F(x+1) - F(x) - (G(x+1) - G(x))| \\ &\leqslant |F(x+1) - G(x+1)| + |F(x) - G(x)| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned} \tag{28.7}$$

并且 $\deg(f)$ 与 $\deg(g)$ 都是整数，得 $\deg(f) = \deg(g)$，(i)得证.

要证(ii)，只需注意到(i)及

$$\begin{cases} G(x+1) = G(x) + \deg(g) \\ F(x+1) = F(x) + \deg(f) \end{cases} \tag{28.8}$$

即得 $G(x+1)-F(x+1)=G(x)-F(x)$. 这表明 $G-F$ 具有周期 1. 证毕.

下面证明,对于扩张映射 f,映射度 $\deg(f)$完全确定了 f 的动力系性质:

定理 28.3 设 f,g 都是圆周上的扩张映射,并且 $\deg(f)=\deg(g)$,则 f 与 g 拓扑共轭.

证明 记 $d=\deg(f)=\deg(g)$,并设 F 和 G 分别是 f 与 g 的提升,则

$$\begin{cases} F(x+1) = F(x) + d \\ G(x+1) = G(x) + d \end{cases} \tag{28.9}$$

作函数列 $H_n(x)$:

$$H_n(x) = G^{-n} \circ F^n(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{28.10}$$

则有

$$\begin{aligned} H_1(x+1) &= G^{-1} \circ F(x+1) \\ &= G^{-1}(F(x) + d) \\ &= G^{-1} \circ F(x) + 1 \\ &= H_1(x) + 1 \end{aligned} \tag{28.11}$$

若 $H_{n-1}(x+1)=H_{n-1}(x)+1$,则有

$$\begin{aligned} H_n(x+1) &= G^{-1} \circ H_{n-1} \circ F(x+1) = G^{-1} \circ H_{n-1}(F(x) + d) \\ &= G^{-1}(H_{n-1}(F(x)) + d) \\ &= G^{-1} \circ H_{n-1} \circ F(x) + 1 \\ &= H_n(x) + 1 \end{aligned} \tag{28.12}$$

由归纳法可知,对一切 n,有

$$H_n(x+1) = H_n(x) + 1 \tag{28.13}$$

令

$$\begin{cases}\Phi_n(x) = H_n(x) - H_{n-1}(x) \qquad (n = 2,3,4,\cdots) \\ \Phi_1(x) = H_1(x)\end{cases} \tag{28.14}$$

则由(28.13)可知，当 $n\geqslant 2$ 时，Φ_n 以 1 为周期，即

$$\Phi_n(x+1) = \Phi_n(x) \qquad (n = 2,3,4,\cdots) \tag{28.15}$$

故 $|\Phi_n(x)|$ 有最小上界 M_n，即

$$|\Phi_n(x)| \leqslant M_n \tag{28.16}$$

由于 G 是扩张映射，用(28.2)可知，有 $\lambda>1$ 使

$$|(G^{-1}(x))'| \leqslant \lambda^{-1} < 1 \tag{28.17}$$

于是有

$$\begin{aligned}|\Phi_{n+1}(x)| &= |H_{n+1}(x) - H_n(x)| \\ &= |G^{-1}\circ H_n \circ F(x) - G^{-1}\circ H_{n-1}\circ F(x)| \\ &= |(G^{-1})'(\xi)\cdot(H_n\circ F(x) - H_{n-1}\circ F(x))| \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}|\Phi_n(F(x))| \leqslant \frac{1}{\lambda}M_n\end{aligned} \tag{28.18}$$

从而，得

$$M_{n+1} \leqslant \frac{1}{\lambda}M_n \leqslant \frac{1}{\lambda^{n-1}}M_2 \tag{28.19}$$

这表明无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x) \qquad (x\in(-\infty,+\infty)) \tag{28.20}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对一致收敛. 设

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x) \qquad (x\in(-\infty,+\infty)) \tag{28.21}$$

由 Φ_n 及 H_n 之定义，以及(28.13)可知，$H(x)$ 满足

$$\begin{cases}H(x+1) = H(x)+1 \\ H\circ F = G\circ H\end{cases} \tag{28.22}$$

事实上,只要注意到

$$H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x)=\lim_{n\to+\infty}H_n(x) \quad (28.23)$$

并对(28.13)及显然的关系 $H_n\circ F=G\circ H_{n+1}$,令 n 趋于 $+\infty$ 取极限,即得(28.22).

由(28.20)的一致收敛性可知,$H(x)$连续.下面进一步证明 H 是$(-\infty,+\infty)$到自身的同胚.为此,交换 F 与 G 的位置,又得连续函数 $K(x)$,使

$$\begin{cases}K(x+1)=K(x)+1\\ K\circ G=F\circ K\end{cases} \quad (28.24)$$

由(28.24)及(28.22)可得

$$K\circ H\circ F=K\circ G\circ H=F\circ K\circ H \quad (28.25)$$

记 $\Psi(x)=K\circ H(x)$,则有

$$\begin{cases}\Psi(x+1)=\Psi(x)+1\\ \Psi\circ F=F\circ\Psi\end{cases} \quad (28.26)$$

下面证明必有 $\Psi(x)=x$.为此,考虑函数

$$D(x)=\Psi(x)-x \quad (28.27)$$

由于 $D(x)$是具有周期 1 的连续函数,故$|D(x)|$必有最大值 $M\geqslant 0$.但由(28.26)可知

$$\begin{aligned}|D(x)|&=|F^{-1}\circ\Psi\circ F(x)-F^{-1}\circ F(x)|\\&=|(F^{-1})'(\xi)\cdot(\Psi\circ F(x)-F(x))|\\&=|(F^{-1})'(\xi)|\cdot|D(F(x))|\\&\leqslant|(F^{-1})'(\xi)|\cdot M\end{aligned} \quad (28.28)$$

由于 f 的扩张性,$|(F^{-1})'(\xi)|<1$,即有 $\alpha\in(0,1)$,使

$$M\leqslant\alpha M \quad (28.29)$$

因而 $M=0$,即 $\Psi(x)=x$.从而 $K\circ H(x)=x$.同理有 $H\circ K(x)=x$.

可见 H 与 K 都是 $(-\infty,+\infty)$ 到自身的同胚. 由 H 决定的 S^1 上的保向同胚 h,使

$$h \circ f = g \circ h \tag{28.30}$$

这表明 f 与 g 拓扑共轭. 证毕.

顺便指出,若直接应用压缩映象原理,则定理 28.3 的证明可以更简短一些. 不过,此处的证法,更易为仅有初等分析知识的读者所接受.

结合定理 28.3 与定理 28.2,可得

定理 28.4　设 $f: S^1 \to S^1$ 是扩张映射. 则 f 是 C^1-结构稳定的.

证明　若 g 与 f 的 C^1 距离是足够接近,由 f 是扩张映射可推出 g 也是扩张映射,这是因为,f 的提升 F 满足

$$|F'(x)| \geqslant \lambda > 1 \tag{28.31}$$

当 g 的提升 G 满足

$$|G'(x) - F'(x)| < \frac{1}{2}(\lambda - 1) \tag{28.32}$$

时,必有

$$\begin{aligned} |G'(x)| &= |F'(x) + G'(x) - F'(x)| \\ &\geqslant |F'(x)| - |G'(x) - F'(x)| \\ &\geqslant \lambda - \frac{1}{2}(\lambda - 1) = \frac{1}{2}(\lambda + 1) > 1 \end{aligned} \tag{28.33}$$

即知 g 是扩张映射. 又当 f 与 g 足够接近时,由定理 28.2 可知, $\deg(f) = \deg(g)$,再用定理 28.3,即知 f 与 g 拓扑共轭. 证毕.

附录

本章仅初步地介绍了圆周自同胚与圆周上的扩张映射. 关于圆周上的动力系统的进一步研究,近年来仍在继续深入,如[122]、[123]、[130]、[140]等. 在综合报告[129]中的有关章节,可以找到更多的文献.

本章的推证过程及表述方法尽可能避免使用非数学专业读者可能不熟悉的概念与术语. 在专著[117]中,用现代数学的概念与手法对圆周上的自同胚与扩张映射作了更深入的介绍. 关于一般流形上的扩张映射的深入研究,可参看[113]及所引文献.

习题

25.1 环面可表为 $S^1\times S^1$,映射

$$E^*: R\times R\to S^1\times S^1$$

$$(w,z)=(E(x),E(y))=(e^{2\pi ix},e^{2\pi iy})$$

$$(w,z)\in S^1\times S^1,(x,y)\in R\times R$$

叫做平面 $R\times R$ 到圆环面 $S^1\times S^1$ 的复迭映射. 设 $f:S^1\times S^1\to S^1\times S^1$ 是环面上的连续自映射. 求证:存在平面到自身的连续映射 F,满足 $E^*\circ F=f\circ E^*$. 并进一步证明与定理 25.3 中(ii)、(iii)相应的结果.

26.2 对于圆周上的连续自映射 f,仿照同胚的方式定义其旋转数,并指出:这时,旋转数可能与 x 有关.

26.3 设 f 是圆周上的保向自同胚,且其旋转数为有理数. 求证:

(i) f 的周期点集为闭集;

(ii) 若(α,β)内没有 f 的周期点,但 α,β 都是 f 的周期点,则存在整数 N,使对任一个 $x\in(\alpha,\beta)$,有

$$\lim_{m\to+\infty} f^{-mN}(x) = \alpha, \qquad \lim_{m\to+\infty} f^{mN}(x) = \beta$$

27.4 求证：反向的圆周自同胚至少有两个不动点.

28.5 设 $g: S^1 \to S^1$ 是扩张映射.

(i) 求证：若 $\deg(g) \neq -2$，则对任意自然数 n，g 有 n-周期点. 当 $\deg(g) = -2$ 时，g 没有 2-周期点. 但对自然数 $n \neq 2$，g 有 n 周期点；

(ii) 试估计 g^n 的不动点的数目.

参考文献

[1] Schröder E. ,Ueber Iterate Funktionen,Math. Ann. ,3(1871), 296—322.

[2] Abel N.H. ,works V. 2,Posthumous paper,1881,36—39.

[3] Dubbey J. M. ,The Math. Work of Charles Babbage,Cambridge Univ. Press,1978.

[4] Koenigs G. ,Recherches sur les integrales de certaines equations fonctionelles,Ann. de l' Ecole Norm. Sup. 3(1884),3—41.

[5] Boedewadt U. T. , Zur lteration realler Funktionen, Zeitsc. Math. ,Band 49,Heft 3(1944),497—516.

[6] Kneser H. ,Realle analytische Losungen der Gleichung $\varphi(\varphi(x))=e^x$ Verwandter Funktional gleichungen,J. Reine Angew Math. ,187(1950),51—57.

[7] Sternberg S. , Local contractions and a theorem of Poincare, Amer. J. Math. ,79(1957),809—824.

[8] Sternberg S. ,The Structure of Local Homeomorphisms of Euclidean n-space,II,Amer. J. Math. 80(1958),623—631.

[9] Sternberg S. , The Stracture of Local Homeomorphisms, III,

Amer. J. Math. ,81(1959),578—603.

[10] Nitecki Z. , Differential dynamics. The. M. I. T. Press, Cambridge. mass. ,1971.

[11] 赵立人,可微变换在n+1维不动流形附近的标准化,中国科学技术大学学报,10卷4期,(1980)103—116.

[12] Hardy G. ,Orders of Infinity,Cambridge,1924,P. 31.

[13] 张景中,杨路,论逐段单调连续函数的迭代根,数学学报,26卷1期,(1983),398—412.

[14] 张伟年,关于具有两端可微性的迭代根存在可能性的问题,数学季刊,4;(1989),2:31—38.

[15] Fort M. K. Jr. ,The embedding of homeomorphisms in flows, Proceedings of Amer. Math. Soc. ,6(1955),960—967.

[16] Lam P. F. ,Embedding homeomorphisms in differential flows, Colloq. Math. 35(1976),275—287.

[17] Lam P. F. , Embedding a differentiable homeomorphism in a flow subject to a regularity condition on the derivatives of the positive transition homeomorphisms, J. of Differential Equations,30(1978),31—40.

[18] Lam P. F. ,in Topological Dynamics:An International Symposium,New York,1968,319—333.

[19] 张景中、杨路,单变元实迭代半群的存在唯一准则,北京大学学报,(自然科学版)1982年第6期,23—45.

[20] 张景中、杨路,同胚嵌入流和渐近嵌入流的问题,中国科学,(A辑)1985年1期,32—43.

[21] 武河、张景中、杨路,高维映射嵌入多参数流与渐近嵌入多参流,中国科学(A辑)1988年1期,25—34.

[22] 麦结华,平面及球面上几类可嵌入连续流的自同胚的特征. 中国科学,(A辑)1985年1期,17--23.

[23] 杨路、张景中,线段上连续自映射嵌入半流的充要条件,数学学报,29卷2期(1986),180-183.

[24] 张景中、杨路,逐段单调连续函数嵌入拟半流问题,数学学报,30卷1期(1987),115--119.

[25] Kuczma M., Functional Equations in a Single Variable, Monografic Matematyczne, Tom46, Warszwa, 1968.

[26] Kuczma M., Fractional iteration of differentiable functions, Ann. Polon. Math, 22(1969/70), 217--227.

[27] Kuczma M. and Smajdor A., Fractional iteration in the class of convex functions, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 16(1968), 717—720.

[28] Kuczma M. and Smajdor A., Regular fractional iteration, ibid. 19(1971), 203—207.

[29] Isaacs R., Iterates of fractional order, Canad. J. Math., 2 (1950), 409—416.

[30] Smajdor, A., On convex iteration group, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 15(1967)325—328.

[31] Reznick B. A., A uniqueness criterion for fractional iteation, Ann. Polon. Math., 30(1974), 219-- 224.

[32] Hadamard, J., Two works on iteration and related questions, Bull. Amer. Math. 50. (1944), 67— 75.

[33] Zdun, M. C., Sone remarks on iteration semigroups, Univ. slaskiw Katowicach Prace Nawkowe. №158 Prace Mat. No7 (1977)65—69.

[34] Roznowski, M. , Approximate Solutions of the functional equation $\varphi^k(x)=f(x)$, Univ. S′laski w Katowicach Prace Mat. 3 (1973), 53— 73.

[35] 赵立人，关于函数方程 $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$ 解的存在唯一性定理，中国科学技术大学学报，第 13 卷(1983)，数学专辑，21—27.

[36] 蒋星耀，关于 Bödewadt 的一个猜测，数学杂志，6 卷 4 期(1986)，433—438.

[37] 张伟年，关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ 解存在性的讨论，科学通报，31 卷 17 期(1986)，1290—1295.

[38] 张伟年，关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ 可微解的讨论，数学学报，32 卷 1 期(1989)，98—109.

[39] 张筑生，圆周上自同胚的嵌入流与变换群的作用，数学学报，24 卷 6 期(1981)，953—957.

[40] 麦结华，圆周上自同胚有 N 阶迭代根的条件，数学学报，30 卷 2 期(1987)，280— 283.

[41] R. Liedl, L. Reich and Gy. Targonski, Iteration Theory and its Functional Equations, (Lecture Notes in Mathematics, 1163), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo(1985)

[42] Falconer K. J. , On the equireciprocal point Problem, Geometriae Dedicata, 14(1983)113—126.

[43] Sarkovskii A. N. , Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself, Ukr. Mat. z. 16, 61—71(1964)

[44] Li T. and Yorke J. A. , Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly, 82, 985--992(1975).

[45] Stefan P. ,A theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphism of the real line, Comm. Math. Phys. ,54,237—248(1977).

[46] Osikawa M. and Oono Y. ,Chaos in C^0-Endomorphism of Interval, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17(1981), 165—177.

[47] Block L. ,Gukenheimer J. ,Misiurewicz M. ,Young L. S. ,Periodic Points and Topological Entropy of One-dimensional Maps, Lecture Notes in Math. 819,Springer-Verlag,New York,1980.

[48] Ho C.-W. and Morris C. , A graph theoretic proof of sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions,Pacific J. Math. 96(1981),361—370.

[49] 熊金城,Sarkovskii 定理的一个简要证明,中国科学技术大学学报,12(1982),4:17—20.

[50] Feigenbaum M. ,Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, J. Stat. Phys. 19 25—52(1978), 21 669—706(1979).

[51] Feigenbaum M. ,The Transition to Aperiodic Behaviour in Turbulent Systems,Commun. Math. Phys. 77,65—86(1980)

[52] Collet P. ,Eckmann J. -P. and Lanford O. E. ,Universal proporties of Maps on an Interval, Commun. Math. Phys. 76, 211—254(1980)

[53] Campanino M. and Epstein H. , On the Existence of Feigenbaum's Fixed Point, Commun. Math. Phys. , 79, 261—302,(1981).

[54] Lanford O. E. ,Remarks on the accumulation of period-doubling bifurcations. In: Mathematical problems in theoretical physics,

proc. ,Lausanne. 1979,Berlin,Heide-lberg,New York;Springer 1980.

[55] Arneodo A., Ferrero,P. and Tresser C.,Sharkovskü's order for the appearance of superstable cycles in one-parametes families of simple real maps: An elementary proof,Comm. on Pure and Appl. Mach.,Vol. 37,No. 1,(1984),13-14.

[56] Collet P. and Eckmann J.,Iterated maps on the interval as dynamical systems,Birkhäuser,1980.

[57] Block L. and Hart D.,The bifurcation of periodic orbits of one-dimensional maps,Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1982),2,125—129.

[58] 张筑生,微分动力系统讲义(1984),北京大学数学系数学研究所发行.

[59] 张景中、杨路.Smale马蹄的一个简单模型,科学通报,1981年12期,713—714.

[60] 张景中、杨路,关于Smale马蹄及其Ω稳定性,数学进展,10卷2期,(1981),

[61] Moser J.,Stable and Random Motion in Dynamical System,Princeton,New Jersey,1979,61—79.

[62] Nitecki Z.,Topological Dynamics on the Interval. Ergodic Theory and Dynamical Systems Ⅱ,Progress in Math. 21,Birkhaur,Boston,1982.

[63] 杨润生,关于线段连续自映射的一个反例,数学年刊A,115—120(1985).

[64] Chu H.,and Xiong J.,A Counter-example in Dynamical Systems of the Interval,ICTP Preprint IC/84/38,1984.

[65] Block L., Stability of periodic orbits in the theorem of Sarkovskii, Proc. A. M. S. 81(1981)333—336.

[66] Block L., Simple Periodic Orbit of Mappings of the Interval, Trans. Amer. Math. Soc. 245, 391—398, (1979).

[67] Coppel W. A., Sarkovskii—minimal Orbits, Math. Proc. Canb. Phil. Soc. (1983), 93, 397—408.

[68] Ho C., On the Structure of the Minimum Orbits of Periodic Points for Maps of the Real Line, Preprint, Edwardsville, 1982.

[69] Li T., Misiurewicz M., Pianigiani G., and Youke J., Odd Chaos, phys. Lett. 87A(1982), 271—273.

[70] X. D. Ye(叶向东) D-function of Minimal Set, Soviet Math. Dokl. 40(1990), №3,

[71] Block L., and Hart D., Stialification of the Space of Unimodal Interval Maps, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 3(1983), 533—539.

[72] Llibre J. and Reventos A., On the Structure of the Set of Periodic Points of a Continuous Map of the Interval with Finitely Many Periodic Point, Arch. Math., 39(1982), 331—334.

[73] Ho C., On Block's Condition for Simple Periodic Orbits of Functions on an Interval, to appear.

[74] 张景中，杨路，关于 Sarkovskii 序的一些定理，数学进展，16卷1期(1987)，33—48.

[75] Block L., Periods of periodic points of maps of the circle which have a fixed point, Proc. A. M. S. 82(1981), 481—486.

[76] Jefremova L. S., Periodic points of a continuous map of a circle, Proc. IX int. conf. on Non-linear Oscillations. Kiev 1981, p. 121, (In Russian)

[77] Misiurewicz M. ,Periodic points of maps of degree one of a circle,Ergod. Th. &. Dynam. Sys. (1982),2,221—227.

[78] Erdös P. and Stone A. H. ,Some Remarks on Almost Transformations,
Bull Amer. Math. Soc. 51(1945),126—130.

[79] Young L. ,A Closing Lemma on the Interval,Invent. Math. ,54 (1979),179—187.

[80] Coven E. M. and Hedlund G. A. ,$\overline{P}=\overline{R}$ for Maps of the Interval,Proc. Amer. Math. Soc. ,79(1980),316—318.

[81] 熊金城,对于线段连续自映射 f,$\Omega(f|\Omega(f))=\overline{P(f)}$,科学通报(中文版)27(1982),513—514.

[82] Coppel W. A. ,Maps of an Interval,I. M. A. Preprint Series # 26,1983.

[83] Coppel W. A. ,Continuous Maps of an Interval,Xeroxed Notes, 1984.

[84] 熊金城,回归点集为闭集的线段连续自映射的周期点的周期,中国科学技术大学学报 13(1983),134—135.

[85] Coven E. M. and Nitecki Z. ,Non-wandering Sets of the Powers of Maps of the Interval,Ergod. Th. and Dyn. Sys. 1(1981),9—31.

[86] Sarkovskii A. N. ,Nonwandering Points and the Centre of a Continuous Map of the Line into Itself,Dopovidi Akad. Nauk Ukrain,RSR ser A,1964,865—868.

[87] 熊金城,线段连续自映射的非游荡集,科学通报(中文版)29 (1984),518—520.

[88] 周作领,无异状点的线段自映射(Ⅱ)中心和深度,数学年刊

A4(1983),732—736.

[89] Nitecki Z. ,Periodic and Limit Orbit,and the Depth of the Centre,for Piecewise-Monotone Interval Maps, Proc. Amer. Math. Soc. 80(1980),511—514.

[90] 周作领.无异状点的线段自映射,数学学报 25(1982),634—640.

[91] Nitecki Z. ,Maps of the Interval with Closed Period Set,Proe. Amer. Moth. Soc. 85(1982),451—456.

[92] 熊金城,周期点集为闭集的闭线段连续自映射,中国科学技术大学学报 11(1981),No4,14—23.

[93] Sarkovskii A. N. ,On a Theorem of G. D. Birkhoff,Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR Ser A,1967,429—432.

[94] A. Blokh,On the Limit Behaviour of One-Dimensional Dynamical Systems,Vspehi Mat. Nauk(1)37(1982),137— 138.

[95] Block L. and Franke J,The Chain Recurrent Set for Maps of the Interval,Proc. Amer. Math. Soc. 87(1983),723—727.

[96] 熊金城,关于线段连续自映射链回归点的一个注记,中国科学技术大学学报,15(1985),385—389.

[97] 廖公夫,闭区间上连续自映射有素周期点的一个必要条件,吉林大学自然科学学报(3)1(1983),10--14.

[98] 廖公夫,线段自映射有素周期点的一个条件,吉林大学自然科学学报(1)3(1985),55--58.

[99] 周作领、刘旺金,线段自映射有异状点的一个充分条件,数学进展 11(1982),68--73.

[100] Block,L. ,Homoclinic Points of Mappings of the Interval,Proc. Amer. Math. Soc. 72(1978),176- 580.

[101] 周作领,线段自映射的非游荡点等于周期点集的一个充要条件,科学通报 23(1981),1409—1410.

[102] Block L.,Mappings of the Interval with finitely Many Periodic Points Have Zero Entropy, Proc. Amer. Math. Soc. 67(1977), 357—360.

[103] Block L.,Continuous Maps of the Interval with Finite Non-wandering Set. Trans. Amer. Mach. Soc. 240(1978), 221—230.

[104] Coven E. M. and Hedlund G. A.,Continuous Maps of the Interval Whose Periodic Points form a Closed Set, Proc. Amer. Math. Soc. 79(1980),127—133.

[105] 周作领,线段自映射非游荡集有限的一个充要条件,数学年刊 3(1982),121—130.

[106] 周作领,线段自映射的非游荡集等于周期点集的一个充分条件,数学学报 25(1982),122—128.

[107] 周作领、刘旺金,线段自映射拓扑熵为零的一个充分条件,数学进展 11(1982),216—219.

[108] 熊金城,线段映射的动力体系:非游荡集、拓扑熵和混乱,中国数学会 50 周年年会综合报告,上海,1985;数学进展,17:1(1988),1—11.

[109] 杨路;张景中,第二类 Peigenbaum 方程,中国科学(A),1985 年 12 月,1061~1069

[110] 郝柏林,分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他,物理学进展,(3)3(1983),329-416.

[111] May R. M,Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics,Nature 261(1976),459-467.

[112] Preston C, Iterates of Maps on an Intervel, lect. Notes Math. 999, 1983, Springer-Verlag.

[113] 张筑生,自映射的扩张不变集,中国科学 A5(1984),408-416.

[114] 周建莹,Taylor 映像中的紊动现象,中国科学 A8(1984),685-697.

[115] 张锦炎,关于 Henon 映像中的 Smale 马蹄,科学通报 24(1984),1478-1480.

[116] 江泽涵,从方程 $x=f^n(x)$ 的实根到自映射 f 的不动点与周期点,数学通报 10(1981),26-28.

[117] 张筑生,微分动力系统原理,科学出版社,北京(1987)

[118] 张筑生,自映射的转移不变集,数学学报,27:4,(1984),564～576

[119] 陈亮,单峰函数的素周期点和馈点,科学通报,1985 年 14 期,1050～1051.

[120] 张广远,n 维动力系统 C^r 扰动下周期轨的分歧定理,数学学报 32:5(1989),647-658

[121] 廖公夫,第二类 Feigenbaum 函数方程的单谷扩充连续解.数学年刊,9(A)6,1988,649-654

[122] 丁森,具有不动点的圆周上连续映射的最小周期轨道,上海交通大学学报,21:4(1987),99-103

[123] 周作领,无周期点的圆周自映射,数学学报,30:4,(1987),523～527

[124] Chris Preston, Iterates of Maps on an Interval, Lecture Notes in Mathematics 999, Springer-Verlag(1983)

[125] 张锦炎,《常微分方程几何理论与分支问题》,北京大学出

版社,1981.

[126] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983

[127] 杨路、张景中、曾振柄,动力系统中的分形集,数学进展,19:2(1990),137～188.

[128] 李后强,程光钺,《分形与分维》,四川教育出版社,1990

[129] 周作领,一维动力系统,数学季刊,3:1(1988)42～64

[130] 周作领,周期点集不空的圆周自映射,数学学报,28:3(1985),360-371

[131] 周作领,关于 Li-Yorke 定理的一个注记,科学通报,1986年1期,1-3.

[132] 周作领,小熵猜测的一个证明,中国科学(A),1985年10期,881-889

[133] 麦结华,C^1 封闭引理的一个较简单的证明,中国科学,(A),1986年5期,458-466

[134] 廖山涛,常微系统的结构稳定性及一些相关问题,计算机应用与应用数学,1978年7期,52-64

[135] 吕以辇,复解析动力系统理论基础,全国复解析动力系统讲习班资料,山东荷泽师专数学系印,(1987)

[136] 曾振柄,一类二维映射产生混沌的一个充分条件,科学通报,32:3(1987),172-176

[137] 顾圣士,乐经良,广义 Henon 映射中混沌现象,上海交通大学学报,21:5,(1987),83-86

[138] 司建国,关于线性函数方程的解,滨州师专学报,5:1(1989)1-15.

[139] Yuan Xiao-feng(袁晓凤). Chaotic Behavior of Continuous Self-Mappings of the Closed Interval, Mathematical Sciences, Ims-12,(1984).

[140] 刘旺金, S^1 上扩张映射的拓扑熵,科学通报,1983 年 4 期. 202～203

[141] 刘旺金,动力系统中拓扑熵的研究,数学进展,11:2 (1982),89-100

[142] 张景中,杨路,章雷,周期轨间蕴含关系的判定算法(Ⅰ),(Ⅱ),应用数学和力学,10:11,(1989),977-985,11:2 (1990),131-140

[143] 张芷芬, R^3 上一个以 Antonie 项链为极小集合的拓扑动力系统,中国科学(A),1982 年 5 期,391-398

[144] 余澍祥,二维流形上动力系统的某些问题,数学进展,10:1,(1981),12-23

[145] 余澍祥,二维流形上的一阶结构稳定系统,科学通报,1983 年 11 期,647-649

[146] 钱敏、严寅,横截环及其对 Hénon 映像的应用,科学通报, 30:13(1985),961-965